Årg. 30: 3 Sept. 1947

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

TREDJE HÄFTET

Sid.

Nils Svartholm, Matrisräkningens användning inom teorien för elektriska fyrpoler 145

G. Starck, Om pH-indikatorer i skolan 157

Richard Westöö och Jan Österlöf, Spår av α-partiklar i fotografisk emulsion 162

Axel Nordhult, De högre tekniska läroverken i Sverige 164

Torsten Jönsson, Magnetronrören ur fysikalisk synpunkt 169

Bokanmälningar: Carlson, Lärobok i geometri II; Julia, Cours de Géométrie; Kendall, The Advanced Theory of Statistics; Intermédiaire des Recherches Mathématiques; Jeffreys, Methods of Mathematical Physics; Eddington, Fundamental Theory; Michaud, Problèmes de Physique; Bauer, La Mesure des Grandeurs; Boutry, Optique Instrumentale; Berg, European Instruments; Beet, Elementary Astronomy; Bolin-Gustaver, Att laborera hemma I; Madame Joliot-Curie, Les Radioéléments Naturels; Chouard m. fl., Les Idées Modernes sur la Mécanisme de la Photosynthèse; Oppenshaw, Laboratory Manual of Qualitative Organic Analysis; Bell, Modern Practical Chemistry; Remick, Electronic Interpretations of Organic Chemistry 184

Gradualavhandlingar (autoreferat): Ulf Hellsten, Determination of the Denominator of Fredholm in Some Types of Integral Equations; Arne Broman, On Two Classes of Trigonometrical Series 196

Tidskrifter, innehållsöversikt 198

Problemavdelning:

Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 199

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen aug.-sept. 1947 202

Pärmar

av prima klot i samma utförande som tidigare kunna nu erhållas från exp.

Se meddelande å annonsbladet.

Pris pr år kr. 8: — pr häfte kr. 2: 50

Nyheter

F. Carlson

LÄROBOK I GEOMETRI

Del. I. (Motsvarande ettbetygskursen i fil. kand.- o. ämbetsex.) Ny upplaga utkommen. 16: —

Del. II. (Del av tvåbetygskursen i fil. kand.- o. ämbetsex.) 16: 50

*

Cotty Blom, Göran Kjellberg och *Valter Schytt*

TENTAMENSUPPGIFTER I MATEMATIK

för betyget B i fil. kand.- o. ämbetsex. med lösningar och svar 7: 50

C. W. K. GLEERUPS FÖRLAG, LUND

Särtryck ur Elementa:

1. Axel Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1: —.
2. Martin Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1: —.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1: —.
4. J. Tandberg, Vinkelns tredelning. Slutsåld.
5. Gustaf Ljunggren, Gasskyddets kemi, kr. 0: 80.
6. Stig Comét, Matrisräkning, kr. 1: 60.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2: 40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1: 40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1: 40.

Problemhäftena: 1936 à 60 öre; *1943, 1944, 1945 och 1946* à 80 öre; med svar och anvisningar. Innehålla matem. o. fysikaliska uppg. i studentex. o. fyllnadsprövningar. Provräkn. i realex. Uppg. i fysik o. i maskin- o. byggnadslära vid praktisk realex.

Problemhäftena för åren 1937—1942 äro slutsålda.

Redaktion och expedition: C. E. Blom, Karlbergsvägen 16 IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.

ELEMENTA

Redaktionskommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, förste aktuarien S. Comét, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och ansvarig utg.: C. E. Blom.

Årligen fyra häften om i regel 64 sid. (mars, juni, sept., dec.). Pris pr år kr. 8:-, pr häfte kr. 2:50. Subskription sker enklast genom inbetalning av kr. 8:- å postgirokonto nr. 527 55, då tidskr. erhålles pr utgivarekorsband. Abonnemang även genom bokhandeln.

Äldre årgångar erhållas direkt från expeditionen till följande priser: Årg. *3, 6—11, 13—16* à 6 kr. pr årg., årg. *17—29* à 8 kr. Bundna i klotband, två årg. i varje bd årg. *7—8, 9—10, 13—14, 15—16* à 14 kr. pr bd, årg. *17—18, 19—20, 21—22, 23—24, 25—26, 27—28* à 18 kr. pr bd.

Innehållsregister till årg. *1—16* à 1 kr. och till årg. *17—24* à 1 kr.

Pärmar av prima klot i samma utförande som tidigare kunna nu åter erhållas från exp. Priset oförändrat, kr. 1:75 per st.; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, osv. t. o. m. 29—30. Det är tillrådligt att utnyttja det tillfälle att erhålla goda pärmar som nu erbjudes.

Rekvisition av äldre årg. och pärmar sker lämpligast genom inbetalning å postgiro 527 55, varvid rekv. skrives å girokupongen.

Redaktion och expedition: C. E. Blom, Karlbergsvägen 16 IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.

Insänd litteratur.

Svenska Bokförlaget (Sthlm 1947):

Nyström-Olson, *Kortfattad funktionslära och analytisk geometri för realgymnasiet.* 2:a uppl., 3:e tr., 80 s., kr. 1:95.

L. Elfman, *Elementär hållfasthetslära,* 4:e uppl., 136 s., kr. 4:50.

R. Nyhlén, *Lärobok i geometri,* för realskolor etc., 65 s., kr. 2:—; *Förberedande kurs i geometri,* 19 s., kr. 0:75; *Tilläggskurs i geometri,* 18 s., kr. 0:90.

Hedström-Öije, *Arbetsuppgifter i ekvationslära.* Del II, 2:a uppl., 153 s., kr. 3:—.

C. G. Hellsten, *Fysik och astronomi.* Del I, 10:e uppl., 112 s., kr. 1:80; Del III, 9:e uppl., 131 s., kr. 1:95.

B. Oldén, *Provräkningsuppg. för folkskolan,* 7:e skolåret, kr. 0:40.

Rendahl-Wahlström-Frank, *Tilläggshäfte med ändringar* till Räknebok för realskolan, Del I A, 7 s.

Insänd litteratur.

A. WALD, *Sequential Analysis.* Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 212, $ 4.00.

H. W. LIEPMANN and A. PUCKETT, *Aerodynamics of a Compressible Fluid.* Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 262, $ 4.00.

J. H. HOLLOMAN and L. D. JAFFE, *Ferrous Metallurgical Design.* Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 346, $ 5.00.

SMITH-SALCOVER-JUSTICE, *Unified Calculus.* Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 507, $ 3.50.

L. W. GRIFFITHS, *Introduction to the Theory of Equations.* Sec. Ed. Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 278, $ 3.50.

H. F. BAKER, *A Locus with 25920 Linear Selftransformations.* Cambridge Univ. Press 1946, Pp. 107, 8 s. 6 d.

A. S. EDDINGTON, *Fundamental Theory.* Cambridge Univ. Press 1946, Pp. 292, 25 s.

HAROLD JEFFREYS-BERTHA JEFFREYS. *Methods of Mathematical Physics.* Cambridge Univ. Press 1946, Pp. 679, £ 3. 3 s.

T. H. TURNEY, *Heaviside's Operational Calculus Made Easy.* Second Ed. Chapman and Hall, London 1946, Pp. 102, 10 s. 6 d.

E. G. RICHARDSON, *Sound, A Physical Textbook.* Arnold & Co., London 1947, Pp. 344, 18 s.

A. E. BELL, *Modern Practical Chemistry.* Arnold & Co., London 1946, Pp. 224.

A. BOUWERS, *Achivements in Optics.* Ur serien »Monographs on the Progress of Research in Holland during the War». Elsevier Publishing Co. Amsterdam 1946, Pp. 135.

Journal de Mathématiques Élémentaires. 1945—1946, Vuibert, Paris, 148 s., 130 fr.

Annales du Baccalauréat, Année 1946: *Mathématiques,* 125 s., 60 fr.; *Sciences Physiques,* 94 s., 60 fr. Vuibert, Paris.

A. DENJOY, *L'énumération transfinie,* I. *La notion de rang.* Gauthiers-Villars, Paris 1946, 206 s., 550 fr.

E. BAUER, *La mesure des grandeurs. Dimensions et unités.* Hermann & Cie, Paris 1939, 41 s.

MADAME JOLIOT-CURIE, *Les radioéléments naturels.* Hermann & Cie, Paris 1946, 191 s., 375 fr.

G. VALIRON, *Équations fonctionelles. Applications.* Masson & Cie, Paris 1945, 605 s., 600 fr.

L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité.* Masson & Cie, Paris 1946, 364 s., 420 fr.

A. F. ANDERSEN og P. MOGENSEN, *Lærebog i Matematik V. Stereometri,* Gyldendalske Boghandel, København 1946, 87 s.

V. PEDERSEN, *Vejledninger til fysiske og kemiske Øvelser.* E. Pedersen, Aarhus 1947, 64 s. + Noteringsplaner, 32 s.

TH. JOHANSEN, *Veileder i løsning av matematikkoppgaver.* Aschehoug, Oslo 1946, 157 s., kr. 6:—.

H. FLOOD, *Kjemi, riss av kjemien og dens anknytning til teknikk og industri.* Grøndahl & Søn, Oslo 1946, 463 s., kr. 13:50.

L. SIMONS, *Fysiikka.* W. Söderström, Helsinki 1946, 466 s.

F. CARLSON, *Lärobok i geometri,* del II, Gleerups förlag, Lund 1947, 349 s., kr. 16:50.

Tekniska Nomenklaturcentralens publikationer, Seelig & Co., Sthlm. 1947. Nr 9, Fyrspråkig illustrerad ordlista för floder och kanaler, 108 s.,

O. BERG, *European Instruments.* Ingenjörsvetenskapsakademien, Sthlm 1947, 38 s., kr. 6:—.

DÆDALUS, Tekniska Museets årsbok 1947, 140 s.

Matrisräkningens användning inom teorien för elektriska fyrpoler.

Av docent NILS SVARTHOLM, Stockholm.

Matrisräkningen har viktiga användningsområden inom olika grenar av fysiken och dess tillämpningar men framför allt inom den teoretiska atomfysiken. Ett område, inom vilket matrisräkningen fått en viss användning under senare år, är teorien för elektriska impedansnät, vilken teori har till uppgift att redogöra för hur spänningar och strömmar transformeras av en given elektrisk anordning, t. ex. en filterkedja eller en ledning eller, varför inte, ett helt telefonnät. Av största vikt och intresse är härvid det fyrpoliga impedansnätet eller fyrpolen, där matrisräkningen får en särskilt enkel form i det att matriser med endast två rader och två kolonner kommer till användning.

1. Komplexa tal i växelströmsläran.

I växelströmsläran låter man ofta spänningar och strömmar representeras av komplexa tal. För en enkelperiodisk växelspänning med vinkelfrekvensen ω skriver man exempelvis

$$V = V_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \tag{1}$$

där det reella talet V_0 är spänningens maximalvärde medan φ är dess faskonstant. Spänningens momentanvärde $V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ uttryckes som realdelen av talet V. Vid sammansättning av två eller flera växelspänningar, t. ex. av de i olika härvor uppkommande spänningarna i statorlindningen till en växelströmsmaskin, erhålles en resulterande spänning, som representeras av ett komplext tal V, som är summan av de mot de enskilda spänningarna svarande komplexa talen. Denna addition, utförd i det komplexa talplanet, motsvarar fullständigt sammansättningen av spänningar medelst de i växelströmsläran så välkända och ofta använda vektordiagrammen.

En växelström $I_0 \cos(\omega t + \varphi')$ representeras på analogt sätt av det komplexa talet

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi')} \tag{2}$$

och för växelströmmars sammansättning gäller detsamma som sagts ifråga om växelspänningar.

Om en elektrisk anordning, som står i kontakt med omgivningen medelst två polklämmor — en dylik anordning kallas ibland en elektrisk tvåpol — icke innehåller någon strömkälla utan matas av en periodisk växelspänning, representerad exempelvis av uttrycket i ekv. (1), och om därvid en växelström I (ekv. 2) uppstår, så uttrycker den av tiden oberoende kvoten

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} e^{i(\varphi - \varphi')} \tag{3}$$

i generaliserad mening det motstånd, som tvåpolen erbjuder mot växelströmmen. Storheten Z, som i allmänhet är ett komplext tal, kallas tvåpolens impedans. Den reella kvoten V_0/I_0 är impedansens absoluta belopp och differensen $\varphi - \varphi'$ den av tvåpolen framkallade fasförskjutningen mellan spänning och ström. Exempelvis ger en av växelström genomfluten spole med självinduktionskoefficienten eller induktansen L en impedans

$$i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$$

vars belopp är ωL. Fasförskjutningen är $\frac{\pi}{2}$ radianer, dvs. strömmen är en kvarts period efter spänningen. Impedanser kan sammansättas genom serie- och parallellkoppling på samma sätt som ohmska motstånd. Så t. ex. har en tvåpol, bildad genom seriekoppling av ett ohmskt (R) och ett induktivt (L) motstånd samt en kondensator (C), en impedans

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}.$$

Varje tvåpol, som i sig icke innehåller några aktiva element såsom förstärkare och liknande, har liksom denna tvåpol en impedans, vars realdel icke kan vara negativ.

Formel (3) uttrycker alltså i komplext skrivsätt Ohms lag för växelström och utgör ett exempel på hur en naturlag genom en utvidgning av de matematiska uttrycksmedlen kan uppnå en större formell enkelhet, som kan vara både till stöd för minnet och till nytta vid tillämpningen.

2. Fyrpoler och matriser.

Efter vad som i det föregående sagts om användningen av komplexa tal vid beräkningar rörande tvåpolers elektriska egenskaper är det ganska naturligt, att man sökt efter andra algebraiska hjälpmedel, då det gällt att beräkna sådana elektriska anordningar, impedansnät, vilka står i kontakt med omgivningen genom fler än

två polklämmor. I det viktigaste fallet, det fyrpoliga impedansnätet eller fyrpolen, gäller det att med hjälp av fyrpolens kända eller antagna karakteristiska egenskaper sätta upp samband mellan de elektriska storheter, spänningar och strömmar, som kan mätas dels vid ingångs- eller primärsidan (V_1, I_1), dels vid utgångs- eller sekundärsidan (V_2, I_2). (Fig. 1.) Om fyrpolens egenskaper är kända, kan i allmänhet två bland de fyra V_1 V_2, I_1, I_2 godtyckligt valda storheter uttryckas som funktioner av de båda övriga. Vid det enklaste och viktigaste fallet, den lineära fyrpolen, är alla existerande samband mellan de nämnda storheterna lineära. Om exempelvis spänningarna V_1 och V_2 uttryckes som funktioner av strömmarna I_1 och I_2, har man ekvationerna

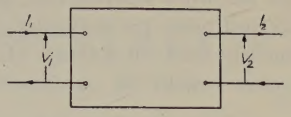


Fig. 1. Fyrpol.

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \alpha I_1 + \beta I_2 \\ V_2 &= \gamma I_1 + \delta I_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

För att en fyrpol skall vara lineär, är det tillräckligt, att den icke innehåller några icke-lineära element såsom likriktare och sådana ohmska motstånd, som beror av strömstyrkan, eller spolar med järnkärna, vilka äger ett av magnetiseringen och därmed av strömstyrkan beroende växelströmsmotstånd. Förstärkarrör kan få förekomma, men endast om strömmar och spänningar håller sig inom de gränser, som motsvarar gränserna för rörkarakteristikans rätliniga förlopp. Dock uteslutes som regel förstärkarrör och andra aktiva element vid definitionen av de egentliga (passiva) fyrpolerna.

Enligt ekv. (4) karakteriseras den lineära fyrpolen av de fyra, i allmänhet komplexa, talen α, β, γ, δ. Det är i många fall lämpligt att sammanställa dessa tal i ett koefficientschema eller en matris

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{5}$$

innehållande två rader och två kolonner. De båda spänningarna kan vi också sammanfatta i en matris med två rader men endast en kolonn

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

På samma sätt skrives för strömmarna

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Härigenom kan ekvationssystemet (4) skrivas i den symboliska formen

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{I}. \tag{6}$$

Ser vi för ett ögonblick bort från den fysikaliska betydelsen av de olika storheterna, ger en jämförelse mellan ekv. (4) och (6) definitionen på multiplikation av en kvadratisk matris ($\boldsymbol{Z}$) med en matris med en kolonn ($\boldsymbol{I}$). För bekvämlighetens skull uppskrives också regeln för multiplikation av två kvadratiska matriser

$$\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{Z}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix} \tag{7}$$

Dessa regler är praktiskt taget de enda som behövs för fortsättningen, men för dem som önskar studera matrisräkningens grunder utförligare rekommenderas S. Cométs uppsatser i Elementa, årg. 23 (1940) och 24 (1941).

Vi återgår nu till den fysikaliska sidan av ämnet och konstaterar, att matrisekvationen (6) har en formell likhet med Ohms lag.. Man kan kalla ekv. (6) för Ohms lag för fyrpoler och den kvadratiska matrisen $\boldsymbol{Z}$, ekv. (5), för impedansmatrisen. Dess fyra element har dimensionen av impedans och är i allmännaste fallet oberoende av varandra. En fyrpol, som är sammansatt av ohmska motstånd, kondensatorer, självinduktionsspolar och transformatorer i godtyckliga kombinationer, men icke innehåller förstärkarrör, kännetecknas av att dess impedansmatris uppfyller villkoret $\beta = -\gamma$. Beviset härför förbigås men beror på den s. k. reciprocitetssatsen, som säger, att om en emk på ingångssidan till en dylik fyrpol ger en viss ström på utgångssidan, så ger samma emk insatt på utgångssidan samma ström på ingångssidan. Vi återkommer härtill vid behandlingen av symmetriska fyrpoler.

3. Fyrpolers sammansättning.

Fyrpoler kan på mångfaldiga sätt sammansättas till nya fyrpoler. Av speciellt intresse är kaskadkopplingen av två fyrpoler såsom i fig. 2. Det är härvidlag lämpligt att representera fyrpolen icke medelst en impedansmatris utan medelst en s. k. kedjematris,

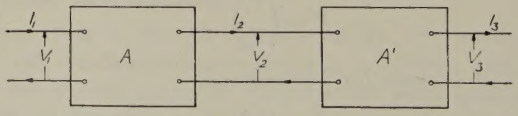


Fig. 2. Kaskadkopplade fyrpoler.

som sammankopplar storheterna (V_1, I_1) på ingångssidan med storheterna (V_2, I_2) på utgångssidan. Om man bortser från specialfall, kan ekv.-systemet (4) lösas med avseende på V_1 och I_1. Man har då

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= aV_2 + bI_2 \\ I_1 &= cV_2 + dI_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

där storheterna a, b, c, d beror av storheterna α, β, γ, δ, eller i matrisform

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{z}_2 \tag{9}$$

där matriserna $\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$, vardera med en kolonn, representerar de elektriska storheterna V och I på ingångs- resp. utgångssidan och där $\boldsymbol{A}$ är en kvadratisk matris

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{10}$$

som representerar fyrpolen. Om utgångsklämmorna kopplas till ingångsklämmorna på en ny fyrpol (fig. 2), representerad av matrisen

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

så att

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{z}_3 \tag{11}$$

där $\boldsymbol{z}_3 = \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$ representerar spänning och ström på den senare fyrpolens utgångssida, så kan man insätta $\boldsymbol{z}_2$ enligt ekv. (11) i ekv. (8) eller (9) och beräkna sambandet mellan $\boldsymbol{z}_1$ och $\boldsymbol{z}_3$. Detta samband får formen

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{A}'' \cdot \boldsymbol{z}_3$$

där $\boldsymbol{A}''$ är en kvadratisk matris med elementen

$$\begin{aligned} a'' &= aa' + bc' & b'' &= ab' + bd' \\ c'' &= ca' + dc' & d'' &= cb' + dd' \end{aligned}$$

En jämförelse med regeln för multiplikation av två kvadratiska matriser, ekv. (7), ger vid handen att matrisen $\boldsymbol{A}''$ är produkten av de båda matriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{A}'$ eller

$$\boldsymbol{A}'' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}'.$$

Kaskadkoppling av fyrpoler motsvarar med andra ord matrismultiplikation av de fyrpolerna representerande kedjematriserna. Därvid är i regel ordningsföljden mellan fyrpolerna, och alltså även mellan matriserna, väsentlig.

4. Symmetriska fyrpoler.

Låt oss se på några olika slag av fyrpoler. Den enklaste fyrpolen är den som icke åstadkommer någon förändring av V och I. Till denna hör enhetsmatrisen

$$\mathfrak{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Om en fyrpol med matrisen $\mathfrak{A}$ är given och om en annan fyrpol med matrisen $\mathfrak{A}'$ är så beskaffad att den vid kaskadkoppling med den förra ger en fyrpol med enhetsmatris $\mathfrak{1}$, så säges den senare ($\mathfrak{A}'$) vara den *inversa* fyrpolen till den förra ($\mathfrak{A}$). Om en fyrpol vändes, så att ingångs- och utgångspolklämmor byter plats, erhålles en ny fyrpol, som kallas den till den förra *reciproka* fyrpolen. Om en fyrpol är identisk med sin reciproka fyrpol, säges den vara *symmetrisk*.

Då vi i fortsättningen huvudsakligen skall uppehålla oss vid symmetriska fyrpoler, är det lämpligt att beräkna de samband, som måste råda mellan storheterna a, b, c, d för att en fyrpol skall vara symmetrisk. Om vi löser ekv.-systemet (8) med avseende på V_2 och I_2 erhåller vi

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{d}{\Delta} V_1 - \frac{b}{\Delta} I_1 \\ I_2 &= -\frac{c}{\Delta} V_1 + \frac{a}{\Delta} I_1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

där

$$\Delta = ad - bc. \tag{13}$$

Sambandet mellan z_1 och z_2 uttryckes här tydligen genom en matris

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

som har egenskapen att vid multiplikation med den ursprungliga $\mathfrak{A}$ ge enhetsmatrisen $\mathfrak{1}$ och som därför kallas den till $\mathfrak{A}$ inversa matrisen och betecknas $\mathfrak{A}^{-1}$. Denna matris hör alltså till den till $\mathfrak{A}$ inversa fyrpolen. Den reciproka fyrpolens matris får vi emellertid, om vi i ekv.-systemet (12) byter tecknet på strömmarna I_1 och I_2. Att vi så bör göra framgår av fig. 1. Alltså erhålles för den reciproka fyrpolens matris

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{b}{\Delta} \\ \frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

och som villkor för att fyrpolen A skall vara symmetrisk

$$\frac{d}{\Delta} = a \qquad \frac{b}{\Delta} = b$$

$$\frac{c}{\Delta} = c \qquad \frac{a}{\Delta} = d$$

Med hjälp av ekv. (13) fås härur förutom den triviala och oanvändbara lösningen $a = -d$, $b = c = 0$, lösningen

$$a = d \tag{14 a}$$

$$\Delta = ad - bc = 1 \tag{14 b}$$

Genom dessa båda relationer har antalet storheter i matrisen A reducerats till två, t. ex. a och b (eller c), båda i allmänhet komplexa tal. Det är ingenting som hindrar att vi om $bc \neq 0$ i stället för dessa båda tal inför två nya komplexa tal Θ och Z, som sammanhänger med de ursprungliga talen på följande sätt

$$a = d = \cosh \Theta$$

$$b = Z \sinh \Theta, \quad c = \frac{1}{Z} \sinh \Theta$$

varav

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & Z \sinh \Theta \\ \frac{1}{Z} \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} \tag{15}$$

Man övertygar sig lätt om att ekv. (14 b) är uppfylld. För övrigt är denna ekvation ekvivalent med det förut omnämnda villkoret $\beta = -\gamma$ för motsvarande impedansmatris och gäller alltså även för alla icke-symmetriska (passiva) fyrpoler. Om endera av storheterna b eller c är noll, kan framställningssättet (15) icke utan vidare tillämpas. Dessa fall kommer emellertid att behandlas senare. Skrivsättet (15) har flera fördelar. Om man exempelvis kaskadkopplar två eller flera likadana symmetriska fyrpoler, så får man en ny symmetrisk fyrpol med en matris, som har samma form som de ursprungliga fyrpolernas matriser, t. ex. för två lika fyrpoler

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & Z \sinh \Theta \\ \frac{1}{Z} \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cosh 2\Theta & Z \sinh 2\Theta \\ \frac{1}{Z} \sinh 2\Theta & \cosh 2\Theta \end{pmatrix}$$

och för n lika fyrpoler

$$A^n = \begin{pmatrix} \cosh n\Theta & Z \sinh n\Theta \\ \frac{1}{Z} \sinh n\Theta & \cosh n\Theta \end{pmatrix}.$$

Vid kaskadkoppling av två eller flera olika symmetriska fyrpoler erhålles däremot i allmänhet *icke* en symmetrisk fyrpol. En sådan fås t. ex. om varje enskild fyrpol i kedjan av fyrpoler har en identisk motsvarighet på en motsvarande plats räknad från fyrpolens andra ända, eller ännu enklare om alla fyrpolerna ha samma Z. Ävenså kan icke-symmetriska fyrpoler ordnas i en kedja, så att denna i vissa fall kan utgöra en symmetrisk fyrpol.

5. En fyrpols bestämning medelst impedansmätningar.

Storheterna Θ och Z tillkommer också en direkt fysikalisk betydelse, som vi senare skall se. Eftersom den symmetriska fyrpolen är bestämd enbart av två storheter, är det tillräckligt att göra två impedansmätningar för att bestämma den. Om man exempelvis mäter förhållandet mellan spänning och ström på ingångssidan, då utgångskretsen är öppen, dvs. $I_2 = 0$, får man den s. k. tomgångsimpedansen

$$Z_0 = \left(\frac{V_1}{I_1}\right)_{I_2=0}$$

Kortslutes utgångskretsen, fås $V_2 = 0$ och man mäter den s. k. kortslutningsimpedansen

$$Z_c = \left(\frac{V_1}{I_1}\right)_{V_2=0}$$

Med hjälp av ekv. (8) och (15) fås

$$Z_0 = \frac{a}{c} = Z \coth \Theta$$

$$Z_c = \frac{b}{d} = Z \operatorname{tgh} \Theta$$

Löses dessa ekvationer med avseende på Θ och Z, fås

$$\operatorname{tgh} \Theta = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_0}} \qquad (16\,a)$$

$$Z = \sqrt{Z_c\, Z_0} \qquad (16\,b)$$

Av den senare ekvationen framgår att Z har dimensionen av en impedans. Om fyrpolen slutes på utgångssidan med en impedans Z_s, är den impedans, som man kan mäta på ingångssidan (Z_p) i allmänhet en funktion av Z_s. I nyss anförda fall var $Z_s = \infty$ resp. 0. Vid kaskadkoppling av ett stort antal likadana fyrpoler kommer Z_p att med växande antal fyrpoler bli mer och mer oberoende av Z_s. Om den första fyrpolen borttages, finner man alltså vid mätning av den återstående kedjans Z_p praktiskt taget samma

resultat, vilket innebär, att den återstående kedjan verkar på den första fyrpolen som om denna vore avslutad just med impedansen Z_p. Vi sätter alltså $Z_p = Z_s$ eller

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2}$$

och får enligt ekv. (8) och (15) $Z_p = Z_s = Z$. Storheten Z kallas fyrpolens *karakteristiska impedans* eller *karakteristik*.

För en kedja av identiska fyrpoler, matad på ingångssidan med en spänning V_1 och avslutad med en impedans lika med karakteristiken Z (s. k. anpassning) gäller vidare, att såväl spänningar som strömmar för varje fyrpol avtar i ett och samma bestämda förhållande, nämligen $e^{-\Theta}$, vilket man lätt finner med hjälp av ekv. (15). Att spänningar och strömmar avtar ju längre bort i kedjan man går, innebär att beloppet av faktorn $e^{-\Theta}$ är mindre än 1 eller att Θ har positiv realdel. För n st. på varandra följande länkar i fyrpolskedjan är motsvarande faktor $e^{-n\Theta}$. Man kallar den komplexa storheten Θ för den enskilda fyrpolens *fortplantningskonstant*, medan realdelen av Θ är dess *dämpningskonstant*.

6. Specialfall. Ekvivalenter.

Vi betraktar nu två specialfall, som visserligen icke utan vidare kan infogas i det av ekv. (15) bestämda schemat, men som kan uppfattas som gränsfall, i vilka fortplantningskonstanten Θ har ett försvinnande värde. Det ena fallet inträffar vid seriekopplad impedans, fig. 3, då fyrpolens matris skrives

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det andra fallet vid parallellkopplad impedans, fig. 4, då tillhörande matris skrives

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}$$

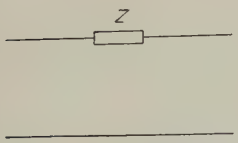


Fig. 3. Seriekopplad impedans.

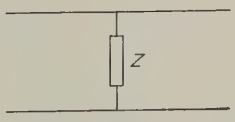


Fig. 4. Parallellkopplad impedans.

För båda matriserna gäller ekv. (14). I första fallet transformeras ej strömmen, i senare fallet ej spänningen av fyrpolen. De båda fyrpolerna kan också karakteriseras av — förutom att $\Theta = 0$ — att tomgångsimpedansen i förra fallet är oändligt stor, kortslutningsimpedansen i senare fallet försvinnande liten. Seriekopplade (S) och parallellkopplade (P) impedanser kan på olika sätt förenas till nya slag av fyrpoler. För att dessa skall vara symmetriska, fordras enligt vad som ovan anförts, att de elementära fyrpolerna anordnas i en bestämd ordningsföljd. Hopkopplingen av en S-impedans och en P-impedans kan med hänsyn härtill ske bl. a. på följande två sätt.

T-schema: S-impedansen delas i två lika delar, vardera lika med Z_1, och P-impedansen kopplas emellan dem enligt fig. 5. Matrisen för den resulterande fyrpolen blir då

$$\boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{S}(Z_1)\,\boldsymbol{P}(Z_2)\,\boldsymbol{S}(Z_1) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} & 2Z_1+\dfrac{Z_1^2}{Z_2} \\ \dfrac{1}{Z_2} & 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Π-schema: P-impedansen delas i två lika delar, vardera Z_2 (parallellkoppling!), och S-impedansen Z_1 inkopplas emellan dem enligt fig. 6. Den resulterande fyrpolens matris blir här

$$\boldsymbol{M}_\Pi = \boldsymbol{P}(Z_2)\,\boldsymbol{S}(Z_1)\,\boldsymbol{P}(Z_2) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \dfrac{2}{Z_2}+\dfrac{Z_1}{Z_2^2} & 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

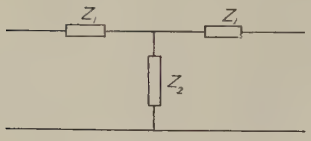


Fig. 5. *T*-schema.

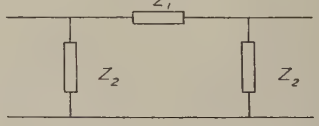


Fig. 6. *Π*-schema.

Dessa båda kopplingar utgör exempel på synteser av fyrpoler, som består av enbart impedanser. De har dock en mera vittgående betydelse genom det faktum, att varje symmetrisk fyrpol till alla sina egenskaper som fyrpol är ekvivalent med en fyrpol enligt fig. 5 (eller en sådan enligt fig. 6) med lämpligt valda impedanser Z_1 och Z_2. Att så är fallet inses därav, att man alltid kan finna två (komplexa) tal Z_1 och Z_2, så beskaffade att matrisen $\boldsymbol{M}_T$, ekv. (17) (eller $\boldsymbol{M}_\Pi$, ekv. 18), är identisk med en given kedjematris.

Man finner nämligen vid en identifiering

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= Z \operatorname{tgh} \tfrac{1}{2}\Theta \\ Z_2 &= \frac{Z}{\sinh \Theta} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

På motsvarande sätt fås med matrisen M_Π

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= Z \sinh \Theta \\ Z_2 &= Z \coth \tfrac{1}{2}\Theta \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

7. Ledningar.

Fyrpolsteorien har en viktig tillämpning på ledningar. Då varje stycke av en dubbelledning kan betraktas som en fyrpol, är det tydligt, att allt som sagts om kaskadkoppling av fyrpoler äger sin tillämpning på en dubbelledning. Det är härvidlag bekvämt att som grundelement för en homogen ledning införa den fyrpol, som består av ett stycke av ledningen, som är lika med längdenheten. Om fortplantningskonstanten för denna fyrpol är γ, är den lika med γx för en ledning med längden x.

Låt oss nu se på några enkla fall av ledningar. En ledning, som består av två parallella trådar, har såväl en serie- som en parallellimpedans. Den förra (Z_1) är sammansatt av ett ohmskt motstånd r och en induktans l, båda storheterna räknade per längdenhet. Parallellimpedansen (Z_2) består av läckningsmotståndet $1/a$ och kapacitansen c, vilka storheter också gäller för ett stycke av ledningen med längden 1. För ett litet stycke Δx av ledningen fås i förra fallet serieimpedansen

$$Z_1 \Delta x = r\Delta x + \mathrm{i}\,\omega l \Delta x \tag{21}$$

där ω är växelspänningens och växelströmmens vinkelfrekvens. För samma ledningsstycke fås läckningsmotståndet $\dfrac{1}{a\Delta x}$ och kapacitansen $c\Delta x$. Eftersom dessa båda slag av impedanser är parallellkopplade, erhålles vid deras sammansättning parallellimpedansen

$$\frac{Z_2}{\Delta x} = \frac{1}{a\Delta x + \mathrm{i}\omega c \Delta x}. \tag{22}$$

Formel (21) ger kortslutningsimpedansen och formel (22) tomgångsimpedansen för elementet Δx av ledningen. Man får alltså enligt ekv. (16 b) för ledningens karakteristiska impedans

$$Z = \sqrt{Z_1 \Delta x \cdot \frac{Z_2}{\Delta x}} = \sqrt{\frac{r + \mathrm{i}\omega l}{a + \mathrm{i}\omega c}}. \tag{23}$$

och till bestämning av fortplantningskonstanten enligt ekv. (16 a)

$$\operatorname{tgh}(\gamma \Delta x) = \sqrt{\frac{Z_1 \Delta x}{\frac{Z_2}{\Delta x}}} = \Delta x \sqrt{(r + \mathrm{i}\omega l)(a + \mathrm{i}\omega c)}$$

För små värden på Δx kan man sätta $tgh(\gamma \Delta x) \cong \gamma \Delta x$ varav följer

$$\gamma = \sqrt{(r + \mathrm{i}\omega l)(a + \mathrm{i}\omega c)} \tag{24}$$

Efter vad som sagts om kaskadkoppling av en lång kedja av fyrpoler med samma karakteristik framgår, att en ledare, som matas i ena ändan med en spänning V_0 och har en oändlig utsträckning åt andra hållet, på ett ställe x, räknat från ingångsändan, har en spänning $V(x)$, bestämd genom relationen

$$V(x) = V_0 e^{-\gamma x} \tag{25}$$

Eftersom konstanterna r, l, a, c i ekv. (24) är reella tal, är det en relativt enkel uppgift att beräkna real- och imaginärdelarna, β resp α av γ. I allmänhet beror dämpningskonstanten β av frekvensen ω. Endast i det viktiga specialfall, då konstanterna r, l, a, c, uppfyller villkoret

$$\frac{r}{l} = \frac{a}{c} \tag{26}$$

är β oberoende av ω, då man har

$$\beta = \sqrt{ra} \tag{27 a}$$

och

$$\alpha = \omega \sqrt{lc} \tag{27 b}$$

Dessa båda likheter innebär, att en godtycklig signal, sammansatt av svängningar av olika frekvens, vid sin utbredning på ledningen visserligen försvagas men ändock behåller sin ursprungliga form. Detta åstadkommes genom att alla frekvenser enligt ekv. (25) och (27 a) försvagas i samma proportion och att fortplantningshastigheten enligt ekv. (27 b) är densamma för alla frekvenser. Faktorn $e^{-\mathrm{i}\alpha x}$ i ekv. (25) innebär ju att spänningen i punkten x ligger vinkeln $\alpha x = \omega x \sqrt{lc}$ efter i fas och $x\sqrt{lc}$ efter i tid i förhållande till spänningen på ingångssidan. Man säger, att ledningen i detta fall är *distorsionsfri*. Då för en dubbelledning kapacitansen c i allmänhet är för stor för att ekv. (26) skall vara uppfylld, söker man med olika medel att öka induktansen l. Detta kan ske genom att ledningen i vissa punkter utrustas med seriekopplade självinduktionsspolar (pupinisering).

Alldenstund ett godtyckligt stycke av en homogen ledning kan betraktas som en fyrpol, är det alltid möjligt att för ett dylikt stycke ange ett ekvivalent T-schema eller ett ekvivalent Π-schema. I förra fallet har man endast att ersätta Θ i ekv. (19) med γx medan Z uttryckes genom ekv. (23). I senare fallet gör man på samma sätt med ekv. (20).

Litteratur.

1. Stig Comét, Något om matrisräkning, Elementa årg. *23*, 145—156 och *24*, 1—12 (1940—41); utgivet i särtryck.
2. Léon Brillouin, Wave propagation in periodic structures, New York 1946. Chap. IX, X.
3. Richard Feldtkeller, Einführung in die Vierpoltheorie, 3. Aufl., Leipzig 1943.
4. Wilhelm Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1. Band, Leipzig 1941.
5. Gabriel Kron, Tensor analysis of networks, New York 1939.

I nr 1 finnes hänvisningar till utförligare framställningar av matrisräkningen. I nr 2 sättes fyrpolsteorien i sammanhang med andra fysikaliska teorier. Nr 3, 4 och 5, ordnade efter avtagande läsbarhet, är utförligare framställningar av teorien för impedansnät.

Om pH-indikatorer i skolan.

Av lektor G. Starck, Stockholm.

Den klassiska indikatorn för mer eller mindre sura lösningar, lackmus, är ju så tillvida idealisk, som dess omslagsintervall, 4,5 — 8,3, innesluter neutralpunkten och som den utanför dessa gränser visar färger, som kontrastera skarpt, nämligen rött och blått. Men lackmus är också behäftad med ganska betydande olägenheter. Om man inte lägger ned stor möda på lösningens riktiga beredning, kommer den att åldras ganska fort, vilket yttrar sig på det sättet, att förrådslösningen, från början klart blå, blir alltmer violett och samtidigt färgsvagare, att färgomslaget på den basiska sidan blir otydligt och att lösningen till sist kan bli alldeles förstörd under avfärgning och bildning av svavelväte. Dess användning torde numera vara helt och hållet inskränkt till skolan, och även ur skolan försvinner den mer och mer, särskilt i de högre klasserna. I den första kemiundervisningen, som rör sig med grova, onyanserade effekter, kan lackmus möjligen försvara sin plats, men i gymnasiet och särskilt vid laborationerna inträder snart behovet av differentierade indikatorer.

Det kan synas vara på tiden att låta lackmusfärgämnet undergå samma öde, som sedan lång tid drabbat de naturliga färgarfärgerna, nämligen att avlösas av fabriksmässigt framställda kemiska föreningar. Det kunde m. a. o. vara värt att försöka ersätta lackmus med en annan indikator, vald bland dem, som verkligen användas i praktisk kemi, och som förekomma i handeln i form av väldefinierade, rena kemiska föreningar. Man har då att välja mellan en enhetlig indikator och en blandning av två eller flera indikatorer. De fordringar, som en indikatorlösning, avsedd för demonstration, skall uppfylla äro följande: den skall vara tvåfärgad (fenolftalein kan sålunda inte ersätta lackmus), och dessa färger skola vara tydligt kontrasterande. Omslagsintervallet bör vidare innehålla pH-värdet 7. Enhetliga indikatorer, som uppfylla dessa villkor, äro endast följande fyra:

Lackmus	rött 4,5 — 8,3 blått	
Bromtymolblått	gult 6,0 — 7,6 blått	pK = 7,1
Neutralrött	rött 6,8 — 8,0 gult	
Fenolrött	gult 6,8 — 8,4 rött	pK = 7,8

(pK är det pH-värde, vid vilket hälften av indikatorn är omvandlad).

Avstår man från villkoret, att pH = 7 skall falla inom omslagsintervallet, dvs. om det antingen är fråga om starka syror och baser eller i annat fall den mellersta delen av neutralisationskurvan inte kommer i betraktande, så ökas antalet användbara, enhetliga indikatorer med dem för vilka den undre pH-gränsen är ungefär 3, den övre 11. Här följa de viktigaste:

Kongorött	blått 3,0 — 5,0 rött	
Bromfenolblått	gult 3,0 — 4,6 blått	pK = 4,0
Metylorange	rött 3,1 — 4,4 gult	
Bromkresolgrönt	gult 3,8 — 5,4 blått	pK = 4,7
Metylrött	rött 4,4 — 6,0 gult	
Klorfenolrött	rött 5,0 — 6,6 gult	pK = 6,2
Kresolrött	gult 7,2 — 8,4 rött	pK = 8,2

Tymolblått, en i blandning med andra mycket användbar indikator, har som bekant två omslagsintervall, nämligen

rött 1,2 — 2,8 gult och gult 8,0 — 9,2 blått.

Ytterfärgerna äro utmärkta, men avståndet mellan dem för stort; dessutom är indikatorn oanvändbar mellan 2,8 och 8,0. Den kan ej ifrågakomma.

De tydligaste färgomslagen torde vara blått till gult och blått till rött. Av de anförda indikatorerna är det således i den första gruppen (då lackmus undantages) endast bromtymolblått, i den andra kongorött, bromfenolblått och bromkresolgrönt, som uppvisa ettdera av dessa färgomslag. Omslaget gult till rött, som är ännu vanligare än de ovan nämnda, är inte så frappant, särskilt då det är fråga om demonstration för ett auditorium.

Traditionen bjuder, att rött skall betyda surt, blått basiskt. Känner man sig bunden härav, måste kongorött, som förhåller sig tvärtom, uteslutas. Av de här uppräknade indikatorerna återstår således endast en, nämligen bromtymolblått, varmed lackmus skulle kunna ersättas (de båda övriga bromderivaten kunna saklöst strykas).

Fråga är väl om inte bromtymolblått är den indikator, som kommer idealet så nära som möjligt, när det gäller att ersätta lackmus. Omslagsintervallets gränser skilja sig endast med storheten $\triangle pH = 1{,}6$; vidare är $pK = 7{,}1$, och den blåa och den gula färgen övergå skarpt och nästan utan mellanfärger i varandra. Indikatorn ger följande färger åt lösningar inom omslagsintervallet:

pH = 5,8	färg = gul	pH = 6,8	färg = ljusgrön
6,0	gul	7,0	blågrön, tämligen ljust
6,2	gul (+ grön)		
6,4	ljusgrön, färgsvag	7,2	blå (+ grön)
		7,4	blå
6,6	ljusgrön, något litet starkare	7,6	blå
		7,8	blå

En lösning av bromtymolblått beredes på följande sätt. 0,1 g av den torra indikatorn blandas i mortel med 16,0 ml 0,01 C NaOH och utspädes därpå till 250 ml med vatten.

Vill man ha en indikator, vars färger äro rött och blått på den sura resp. alkaliska sidan, blir det nödvändigt att blanda två färgämnen. G. Fowles rekommenderar i sin »Lecture Experiments in Chemistry» en blandning av metylrött och tymolblått. Jag har undersökt denna indikatorblandning närmare och därvid använt lösningar, beredda på följande sätt.

Lösning A: 0,1 g metylrött i 250 ml vatten,
» B: 0,1 g tymolblått + 2,15 ml 0,1 C NaOH + 250 ml vatten.

Lösningarna A och B blandades i olika proportioner och blandningarna prövades med olika buffertar. För att få en användbar

indikator måste man taga tymolblått i stort överskott, 6 à 7 ggr mängden metylrött. Nödvändigheten härav gör sig särskilt gällande på den basiska sidan, som framgår av följande utdrag ur en mera detaljerad prövning.

Indikator	pH = 2,9	4,0	9,6	9,9	11,0
1 ml A + 1 ml B	röd	röd (+ gul)	ljusgrön	grön	olivgrön
1 ml A + 4 ml B	röd	orange	grön	blå (+ violett)	blå
1 ml A + 7 ml B	röd	gul (+ orange)	grön (+ blå)	blå	blå

Tabellen visar, att vid ökning av tymolblått en förskjutning av omslagsintervallets gränser mot lägre pH-värden äger rum, vilket är att vänta. Det viktigare torde vara att indikatorn visar rent blå färg vid inte allt för höga pH-värden; på den sura sidan kommer den röda färgen att uppblandas med gult, vilket är mindre störande. Vid pH under 1,2 slutligen äro bägge indikatorerna röda. Ett stort överskott av tymolblått är således motiverat. Nedanstående färgskala erhölls med indikatorblandningen 1 ml A + 6 ml B

pH	färg	pH	färg
3,8	röd	6,8	ljusgul
4,2	rödgul	7,0	gul
4,6	orange	7,2	»
5,0	gul + svagt röd	7,4	gul + svagt grön
5,4	» » »	7,6	gul + grön
5,6	gul, renare	7,8	gröngul
5,8	» »	8,0	grön
6,0	ljusgul	9,6	grön + blå
6,2	»	9,9	blå + violett
6,4	»	11,0	blå, renare
6,6	»	12,25	blå

Gränserna vid blandningsproportionen metylrött : tymolblått = = 1 : 6 äro ungefär 4 och 10, ett ganska stort avstånd. Vidare är lösningen rent gul inom ett relativt stort intervall, nämligen mellan 5 och 7,4. Gul färg kan således betyda både sur och basisk lösning, m. a. o. denna indikator är för det första ingen universalindikator, vilket ju inte heller var avsett; den lämpar sig för det andra endast för starkt sura eller starkt basiska losningar.

En avgjord förbättring erhålles, om man ersätter tymolblått med bromtymolblått. Även i detta fall måste indikatorlösningen inne-

hålla den blåa indikatorn i stort överskott. Den kan beredas på följande sätt.

Lösning A: 0,1 g metylrött i 150 ml vatten,
» B: 0,75 g bromtymolblått rives i porslinsskål med 0,1 C NaOH; därpå utspädes med 850 ml vatten. — Genom blandning av A och B erhålles 1 liter indikatorlösning. Vid prövning med buffertlösningar erhöllos tabellens färger:

pH	färg	pH	färg
2,2—4,2	röd	6,8	grön
4,4	röd + gul	7,0	blågrön
4,6	rödgul	7,2	blå + grön
4,8	gul + röd	7,4	blå + grön
5,0	gul	7,6	blå + (grön)
5,4	klargul	7,8	blå
5,8	gul + (grön)	8,0	blå
6,2	ljusgrön + (gul)	8,3—9,2	blå
6,6	grön		

Tabellen visar en indikator, vars omslagsintervall från rött till blått ligger mellan de ungefärliga gränserna 4,2 och 7,8, dvs. så som för lackmus. Jämförd med lackmus är denna indikator bättre så tillvida som dess blåa färg är renare och fri från den inblandning av violett, som man ofta iakttar hos lackmus. Vidare är denna indikators färg i omgivningen av neutralpunkten (grön till blågrön) skarpt skild från ytterfärgerna och lätt att iakttaga, medan däremot lackmus i samma område visar en oskarp violett färg. Om således någon anser skäl föreligga att utbyta lackmus mot någon annan indikator med samma färger, torde denna blandning av metylrött och bromtymolblått kunna anbefallas.

Utom som pH-indikator har emellertid lackmus ännu en användning i skolan, nämligen för att påvisa blekmedel, särskilt klor. Det är således skäl att undersöka, hur de här ovan nämnda färgämnena förhålla sig i detta avseende. En preliminär, summarisk prövning gav till resultat, att blandningarna av metylrött med tymolblått resp. bromtymolblått båda blekas av klor.

Spår av α-partiklar i fotografisk emulsion.

Av fil. lic. Richard Westöö och fil. mag. Jan Österlöf, Stockholm.

Det är ju sedan länge känt, att radioaktiv strålning av alla slag svärtar den fotografiska plåten. Utefter en α-partikels bana framträda efter framkallning ett antal silverkorn. I en vanlig emulsion ligga de så glest, att det är svårt att samordna dem till ett spår. I de av Ilford Ltd nyligen framställda Nuclear Research Plates är silverbromidhalten så hög, att de reducerade kornen gränsa intill varandra och bilda ett väldefinierat spår. β-partiklarnas spår äro däremot alltför oregelbundna och glesa för att kunna urskiljas och ge blott en bakgrund av silverkorn i den framkallade plåten liksom γ-strålarna. För att längden av de några tiotal μ långa α-spåren skall kunna mätas noga, är kornstorleken i dessa specialplåtar liten ($^1/_4$ μ), och för att spår med alla möjliga orienteringar skola kunna registreras till sin fulla längd, är emulsionsskiktet av avsevärd tjocklek (40—100 μ), vilket förutom den stora silverhalten bidrar till att framkallnings- och fixeringstid bli betydande.

Ett förfaringssätt att demonstrera delar av det successiva sönderfallet i toriumserien är följande, som angivits bl. a. av Taylor och Dabholkar[1] och Powell m. fl.[2]. Den silverrika emulsionen dränkes in med en lösning av toriumnitrat och får torka. Efter några dygn framkallas och fixeras den och betraktas under immersionsolja i ett mikroskop.

Om ThC″-grenen uteslutes, lyder sönderfallsserien med ungefärliga halveringstider utsatta:

$$\mathrm{Th} \xrightarrow[10^{10}\ \text{år}]{\alpha} \mathrm{MsTh1} \xrightarrow[7\ \text{år}]{\beta} \mathrm{MsTh2} \xrightarrow[6\ \text{tim.}]{\beta} \mathrm{RdTh} \xrightarrow[2\ \text{år}]{\alpha} \mathrm{ThX} \xrightarrow[90\ \text{tim.}]{\alpha}$$

$$\mathrm{Tn} \xrightarrow[50\ \text{sek.}]{\alpha} \mathrm{ThA} \xrightarrow[0{,}1\ \text{sek.}]{\alpha} \mathrm{ThB} \xrightarrow[10\ \text{tim.}]{\beta} \mathrm{ThC} \xrightarrow[1\ \text{tim.}]{\beta}$$

$$\mathrm{ThC'} \xrightarrow[3 \cdot 10^{-7}\ \text{sek.}]{\alpha} \mathrm{ThD}.$$

[1] Taylor och Dabholkar, Proc. Ind. Acad. Sci. *3*, 265, (1936).
[2] Powell, Occhialini, Livesey och Chilton, Jour. Sci. Inst. *23*, 102, (1946).

Det är icke enbart torium som finnes i lösningen och diffunderar in i gelatinet utan också dess dottersubstanser. Därför bildas åtskilliga α-spår från bl. a. ThX. En genom dylikt sönderfall bildad Tn-kärna förvandlas snabbt till ThA och ThB, som om tiden medger, går över i ThC, ThC′ och ThD före framkallningen. Man bör alltså i mikroskopet kunna iakttaga grupper av fyra α-spår, som utgå från en gemensam punkt, s. k. toriumstjärnor.

I det reproducerade mikrofotografiet fig. 1 förhålla sig de fyra spårens längder till varandra ungefär som räckvidderna från ThC′, ThA, Tn och ThX i luft. Tolkningen ovan kan alltså tillämpas på den avbildade stjärnan. ThC′-spåret är ca 47 μ långt.

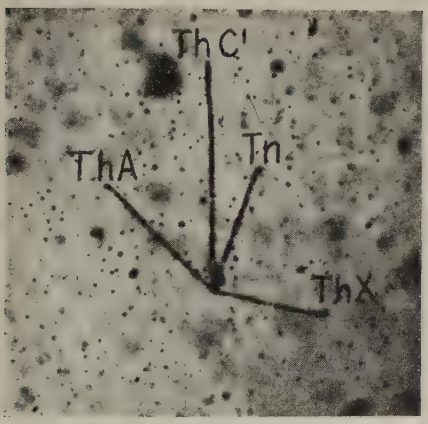


Fig. 1. Typisk »toriumstjärna».

Fig. 2. Exempel på diffusion och kollision.

Förstoring ca 630 ggr.

Andra delar av toriumkedjan ge andra typer av stjärnor. α-spåren från Th kunna däremot väntas uppträda isolerade, eftersom sönderfallsprodukterna ha så långa halveringstider. Det visar sig också vara fallet.

Det ensamma, snett uppåt åt höger riktade spåret i fig. 2 har utgått från ThX. Den bildade Tn-atomen har diffunderat några μ, innan de följande sönderfallen ägt rum. Knycken på spåret från ThA beror på kollision med en Ag- eller Br-kärna. Spåren från Tn och ThX äro suddiga, därför att de icke löpa parallellt med emulsionsytan. Detta är naturligtvis regel. Vid längdmätningen får man taga hänsyn härtill och mäta djupet med fininställningsskruven på mikroskopet.

En ytterst utspädd radiumlösning ger stjärnor, vilka som regel bestå av α-spåren från Ra, Rn, RaA och RaC'. Bilder visas av WILKINS.[3]

Den fotografiska metoden för spårregistrering har andra, mer betydelsefulla användningar än dylika demonstrationer av den naturliga radioaktiviteten, som framgår av en sammanfattande artikel av SHAPIRO.[4] Det är framförallt med denna metod som tre- och fyrdelningen av uran vid en del fissioner påvisats, TSIEN SAN-TSIANG m. fl.[5].

Den mödosammare metoden att avbilda en bana i Wilsonkammare ger ungefär dubbla noggrannheten i räckviddsbestämningen och är ensam användbar vid elektronbanor. Den har därför ingalunda spelat ut sin roll.

[3] WILKINS, Jour. Appl. Phys. *11*, 35, (1940).
[4] SHAPIRO, Rev. Mod. Phys. *13*, 58, (1941).
[5] TSIEN SAN-TSIANG, HO ZAH-WEI, VIGNERON och CHASTEL, Nature *159* 773, (1947).

De högre tekniska läroverken i Sverige.

Av rektor AXEL NORDHULT, Stockholm.

Under 1700-talet började industrien sin segerrika konkurrens med hantverket, och härigenom uppstod ett behov av ökad teoretisk kunnighet som komplement till den praktiska yrkeserfarenheten. Redan under 1800-talets första decennier började till följd härav tekniska läroanstalter upprättas i de länder där industrialismen gjort sitt intåg. I Sverige upprättades Teknologiska Institutet — sedermera Tekniska högskolan — år 1827 och några år senare Chalmers tekniska institut i Göteborg.

Bildlikt talat skulle all inom industrien verksam personal kunna anses bilda en pyramidformad kropp, vars nedre och största del utgöres av arbetarna och toppen av chefer och ledande tekniker. Mellan dessa båda personalkategorier finnas skikt av exempelvis förmän, verkmästare, driftsledare i själva fabrikerna och kopister, ritare, kontsruktörer och ingenjörer på företagens kontor. För dessa personalkategorier finnas olika läroanstalter. Uppifrån räknat ha vi de tekniska högskolorna, som för de högsta posterna utbilda civilingenjörer, bergsingenjörer och arkitekter. Därefter komma de högre tekniska läroverken, som utbilda ingenjörer. Vissa läroanstalter, såväl statliga som kommunala och ej minst

enskilda, utbilda därunder liggande skikt av tekniker för mycket varierande tjänstemannauppgifter, och slutligen ha vi i Sverige lärlings- och yrkesskolor samt verkstadsskolor för arbetarutbildningen.

Våra nuvarande tekniska läroverk ha vuxit fram ur de s. k. tekniska elementarskolorna, som började upprättas på 1850-talet. För inträde erfordrades ursprungligen blott folkskolekunskaper, och då studietiden endast var två år, kunde kunskapsmålet ej sättas allt för högt. Men tekniken befann sig ju också på ett relativt enkelt stadium. Vart efter de tekniska framstegen gjorts ha studierna successivt utvidgats såväl vid de tekniska högskolorna som de tekniska läroverken. År 1877 ökades studietiden vid elementarskolorna till tre år, varjämte inträdesfordringarna skärptes och preciserades. Inträdesprov måste avläggas i svenska språket och i räkning. I stort sett behöllo de tekniska elementarskolorna sin organisation oförändrad fram till 1918, då de började omvandlas till sin nuvarande form — tekniska läroverk.

Inom de tekniska läroverken finnas två särskilda skolformer, nämligen tekniska gymnasier och tekniska fackskolor. De tekniska gymnasierna äro treåriga. För inträde fordras realexamenskunskaper i svenska, tyska, engelska, matematik, fysik, kemi och teckning. Praktikkrav för inträde är minst två månader och för flyttning till sista klassen minst sex månader, varvid praktiken skall vara lämplig. Det första läsåret följa alla gymnasieeleverna samma undervisningsplan. Detta år omfattar timplanen matematik, fysik, kemi, ritteknik, projektionslära, svenska, tyska och engelska samt gymnastik. Under de två sista läsåren äro studierna differentierade på olika facklinjer såsom linjer för maskinteknik, elektroteknik, kemisk teknik, byggnadsteknik osv. I motsats till de allmänna läroverken, som alla använda en gemensam undervisningsplan, utarbetar varje tekniskt läroverk förslag till sin speciella plan för varje linje, som granskas och godkännes av överstyrelsen. Härigenom blir utbildningen vid de olika läroverken något särpräglad men i stort sett likvärdig. Som exempel på utformningen av en dylik specialiserad gymnasielinje kan nämnas, att den maskintekniska linjen vid läroverket i Stockholm omfattar följande läroämnen under de två sista läsåren: matematik, fysik, mekanik, hållfasthetslära och grafostatik, maskinelement, transportanordningar, materiallära, maskinlära (= ång- och motorteknik), verkstadsteknik, elektroteknik, byggnadslära, handelsteknik, industriell ekonomi, författningskunskap, nationalekonomi, svenska, tyska och engelska samt gymnastik. Av dessa läroämnen läses endast maskinläran i båda klasserna.

Inträdesfordringarna till de tekniska gymnasierna äro sådana, att denna skolform lämpar sig särskilt väl för ungdom, som genomgått realskola och avlagt realexamen. Betyg från första ring av fyraårigt realgymnasium likställes i detta sammanhang med realexamen.

Emellertid finnes även en annan kategori bland ungdomen, som det är angeläget att föra fram till en ingenjörsexamen nämligen de yngre arbetare inom industrien, som ha håg och fallenhet för teoretiska studier men som ej haft förmånen att genomgå realskolan. Huvudsakligen för dem ha de tekniska fackskolorna inrättats. För inträde i en fackskola fordras ej mindre än två års god praktik jämte realexamens kunskapsmått i svenska, fysik, kemi och teckning. Kunskaper i främmande språk fordras ej men däremot kunnighet i matematik utöver realexamensfordringarna, nämligen andra gradens ekvationer med en och flera obekanta samt gymnasiets planimetrikurs och proportionslära. På grund av relativt höga matematikfordringar och den betydande praktiska erfarenheten i förening med något högre ålder än i gymnasiet och därtill i regel en mycket stor ambition hos eleverna har studietiden kunnat nedbringas till två läsår. Differentieringen på olika facklinjer sker här redan under första läsåret. Tyska och engelska läses, men ringa tid ägnas dock däråt. Ett påbörjat studium i dessa språk gör det dock möjligt att efter avgångsexamen komplettera kunskaperna i mån av behov.

Genom beslut av 1946 års riksdag ändrades benämningen tekniskt läroverk till högre tekniskt läroverk.

Avgångsexamens namn vid de tekniska gymnasierna ändrades år 1944 från teknisk studentexamen till ingenjörsexamen. Även examen vid fackskolorna kallas ingenjörsexamen. Dessa examina övervakas av examensombud utsedda av Kungl. Maj:t. Särskilda examensskrivningar förekomma ej, utan vitsorden grundas på samtliga prestanda under hela skoltiden. Examensombuden besöka läroverken ett par dagar under mars månad, då undervisningen åhöres ej blott i avgångsklasserna utan även i lägre klasser. Skriftliga prov, laborationsredogörelser, konstruktionsövningar m. m. studeras. Kursernas omfattning och innehåll diskuteras med lärarna, varvid jämförelser göras med andra läroverk. Vid själva examenstillfället återkomma ombuden, och förhören tillgå ungefär som i studentexamen. Dessa examensombud kunna emellertid ej underkänna en elev, som godkänts av kollegiet. En betydelsefull avvikelse från bestämmelserna för studentexamen består även däri att kollegiet kan medgiva en examinand, som underkänts i något ämne, att undergå fortsatt prövning vid höstterminens början och

då erhålla avgångsexamen. Denna bestämmelse tillämpas ej sällan och synes mycket ändamålsenlig, därigenom att lärarna kunna sätta ett underbetyg utan att någon katastrofstämning infinner sig, vilket också medför att underbetyget verkligen tilldelas examinanden, då kunskaperna ej äro nöjaktiga. Tillfredsställelsen med denna examensreform synes vara allmän bland såväl lärare, elever och målsmän som examensombud och fackhögskolornas lärare, som mottaga en del av eleverna för fortsatt utbildning.

De högre tekniska läroverken sortera under ecklesiastikdepartementet. Det centrala överordnade ämbetsverket var till 1944 Kungl. Skolöverstyrelsen, men detta år inrättades ett nytt ämbetsverk, Kungl. överstyrelsen för yrkesutbildning, som nu är dessa läroverks närmaste överordnade myndighet. Verkets chef är en överdirektör. I stället för rotlar med undervisningsråd som chefer finnas här i motsvarande ställning byråer och byråchefer. Vid varje tekniskt läroverk finnes en styrelse, delvis utsedd av Kungl. Maj:t delvis av vederbörande kommun. Denna styrelse äger i vissa avseenden större befogenhet än de allmänna läroverkens lokalstyrelser.

Lärarkåren utgöres av ordinarie lärare, som samtliga, då endast gymnasiestadium förekommer, äro lektorer. Dessutom finnas e. o. adjunkter, extra adjunkter och timlärare. I matematik, fysik, kemi och språk är lektorskompetensen densamma som vid de högre allmänna läroverken dvs. fil. doktorsgrad och provår. I de tekniska ämnena fordras civilingenjörsexamen med kvalificerade betyg, tekniskt författarskap, teknisk verksamhet samt erfarenhet som lärare.

I förhållande till elevantalet är lokalbehovet större vid ett tekniskt läroverk än vid ett allmänt läroverk. Man har större behov av ritsalar och laboratorier. För att belysa detta kan nämnas, att vid högre tekniska läroverket i Stockholm finnas 13 ritsalar samt institutioner för fysik, kemi, maskinteknik, elektroteknik och byggnadsteknik. Som exempel kan anföras, att den maskintekniska institutionen förfogar över laboratorier för mekanisk verkstadsteknik, svetsteknik, gjuteriteknik, stålets värmebehandling, hållfasthetsprovning, metallmikroskopi och röntgenkontroll av material samt en fristående byggnad för ång- och förbränningsmotorteknik m. m. Likartade äro förhållandena inom de övriga tekniska institutionerna. Vid varje sådan institution finnes en vaktmästare. Särskild verkstad med personal finnes dessutom för reparation och nytillverkning av undervisningsmateriel.

Tekniska gymnasier finnas i Borås, Gävle, Göteborg, Härnösand, Hälsingborg, Karlskrona, Luleå, Malmö, Norrköping, Skellefteå,

Stockholm och Örebro. Bland dessa läroanstalter finnas dessutom tekniska fackskolor i Karlskrona, Malmö och Stockholm, varjämte fristående fackskolor äro upprättade i Eskilstuna och Västerås. Finnes både tekniskt gymnasium och fackskola vid en läroanstalt, kallas denna tekniskt läroverk. Finnes endast gymnasium eller fackskola kallas den tekniskt gymnasium resp. teknisk fackskola.

Den utbildning som erhålles vid ett tekniskt läroverk gör den utexaminerade kvalificerad till anställning inom industrien som ingenjör, vilken titel han givetvis gör sig allt mera förtjänt av i samma mån som han samlar erfarenhet och visar sig kunna fullgöra sina uppgifter. Omkring 90 % av de utexaminerade gå direkt ut i näringslivet. De återstående fortsätta vid fackskolor, vanligen tekniska högskolorna. Numera berättigar ingenjörsexamen även till fortsatta studier vid matematisk-naturvetenskaplig sektion vid universitet samt att bli officer på stat.

Liksom det allmänna undervisningsväsendet tid efter annan står inför behovet att förbättra undervisning och organisation på grund av socialt och pedagogiskt framåtskridande, gör sig ett sådant behov gällande även vid de tekniska läroverken. Här tillkommer också att beakta den tekniska utvecklingen, vilket lett till en allt starkare anhopning av lärostoff. Detta kan endast ske till en viss gräns. När denna gräns nåtts, måste nya lösningar sökas. Två huvudalternativ stå därvid till buds, nämligen antingen en förlängning av studietiden eller en längre driven specialisering av studierna. För de tekniska gymnasiernas vidkommande synes lösningen ligga i ett års förlängning av studietiden, ty en längre driven specialisering bör ej göras på grund av elevernas ungdom och ringa vetskap om vad de komma att ägna sig åt inom det huvudfack de valt. För fackskolornas del synes däremot en större specialisering vara lämpligaste åtgärden, då eleverna här på grund av sin ofta mångåriga praktik redan före skoltiden definitivt kunna välja ett mera begränsat verksamhetsområde. Det bör nämligen konstateras, att elevernas nuvarande arbetsbelastning vid de tekniska läroverken pockar på vissa förändringar för att förhållandena skola bli fullt tillfredsställande.

Magnetronrören ur fysikalisk synpunkt.

Av t. f. laborator TORSTEN JÖNSSON, Göteborg.

Omkring år 1938 startades i England ett ytterst intensivt forskningsarbete för att utveckla metoder för generering av mycket högfrekvent elektromagnetisk strålning av stor intensitet.[1] Man gick till en början fram efter två linjer. Dels försökte man att förbättra och modifiera de vanliga sändarrörtyperna, och dels försökte man att utveckla nya typer av sändarrör.

Det visade sig snart, att tillfredsställande resultat inte kunde uppnås på den förstnämnda linjen. En lågfrekvensoscillator behåller approximativt sina egenskaper vid höga frekvenser, om rördimensionerna minskas ner i proportion till våglängden λ. Rörstorleken måste sålunda minskas med ökande frekvens, vilket emellertid medför svårigheter, då man kommer upp i frekvenser av storleksordningen 1000 Mc/sek (1 Mc/sek = 10^6 p/s). Katod- och anodytorna reduceras proportionellt mot λ^2, varför såväl elektronemission som anodförlust snabbt minskas med ökande frekvens, och dessutom bli elektroder och elektrodavstånd så små, att det blir svårt att åstadkomma en stabil konstruktion. Man framställde visserligen trioder och tetroder med avsevärt förbättrade högfrekvensegenskaper, men av anförda skäl visade det sig inte möjligt att åstadkomma sådana rör med tillräckligt hög effekt inom mikrovågsområdet.

Arbetet utefter den andra linjen blev däremot framgångsrikt. En modifikation av en oscillator, som tidigare inte haft någon teknisk användning, nämligen magnetronen, visade sig ha den eftersträvade prestationsförmågan. Denna modifikation, resonatormagnetronen, konstruerades vid universitetet i Birmingham och förelåg i praktiskt användbart skick 1940. Från slutet av detta år utvecklades magnetronerna vidare under intimt samarbete mellan engelska och amerikanska forskargrupper.[2] Högeffektmagnetroner

[1] Jfr ROLAND AJGER, Ekoradio. Elementa *30*, 91, 1947.

[2] Beträffande utvecklingsarbetet efter 1940 komma inga namn att nämnas, därför att det f. n. är omöjligt att avgöra, i vad mån enskilda personer skola tillskrivas de avgörande framstegen. Man bör iaktta en viss försiktighet även beträffande åren närmast före 1940, eftersom säkerligen betydelsefulla resultat, som uppnåddes i olika länder, av

finnas nu för våglängder från ca 0,5 till ca 50 cm. Övre gränsen för impulseffekten är f. n. ca 100 kW vid 1 cm våglängd och ca 3 MW vid 10 cm våglängd.

Mikrovågstekniken utvecklades med de militära behoven av radar som incitament, men därför bör man inte förbise dess betydelse för fredlig verksamhet. Betydelsen av radar för trafiksäkerheten till sjöss och i luften ävensom mikrovågsteknikens betydelse för den elektriska kommunikationstekniken inses utan vidare. Men även den fysikaliska grundforskningen erbjudes nya effektiva hjälpmedel. Vi ha nu möjlighet att generera strålning av hög effekt inom ett våglängdsområde, som inte ligger så långt utanför det infraröda; vi kunna därför vänta oss intressanta forskningsresultat inom molekyl- och atomfysiken. Kärnfysiken har hittills arbetat med mycket dyrbara apparaturer för acceleration av laddade partiklar. Det torde nu vara möjligt att konstruera lineära acceleratorer, drivna av magnetroner, till så billigt pris, att även ekonomiskt svaga institutioner bli i stånd att bedriva framgångsrik kärnforskning.

De fysikaliska principer, på vilka magnetronoscillatorerna äro baserade, skola i sina huvuddrag behandlas i föreliggande uppsats.[1] Som inledning torde det vara lämpligt att diskutera den s. k. likströmsmagnetronen.

En elektron med laddningen $-e$ elektrostatiska enheter och massan m gram, som rör sig i ett *elektriskt* fält av styrkan E dyn/ese, påverkas av en kraft eE dyn, som är riktad *motsatt* fältriktningen och som är oberoende av elektronens hastighet. Är fältet konstant och homogent, blir elektronens rörelse identisk med en kropps rörelse i ett homogent gravitationsfält sådant som tyngdkraftens fält nära jordytan.

En elektron, som rör sig i ett *magnetiskt* fält, påverkas av en kraft, som beror av elektronens hastighet v cm/sek, den magnetiska induktionen B gauss och vinkeln Θ mellan riktningarna av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{B}$. Kraften, F dyn, är vinkelrät mot planet, som innehåller $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{B}$, och dess storlek är proportionell mot v, B och $\sin\Theta$, dvs.

$$\boldsymbol{F} = \frac{e}{c}\left(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}\right) \quad \text{och} \quad F = B\frac{e}{c} v \sin\Theta,$$

---

naturliga skäl inte redovisades på vanligt sätt. Man bör också hålla i minnet, då man försöker bedöma betydelsen av olika forskargruppers insatser, att mikrovågsproblemet inte hade fått en tillfredsställande lösning bara genom tillkomsten av resonatormagnetronen; åtskilliga andra detaljproblem måste lösas samtidigt.

[1] Övriga typer av mikrovågsrör, bl. a. klystronerna, komma att behandlas i Elementa längre fram.

där e/c är elektronladdningen uttryckt i elektromagnetiskt mått (c = ljushast. $\approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek).

Om v är parallell med $\boldsymbol{B}$, blir $F = 0$.

Sker rörelsen vinkelrätt mot ett homogent magnetfält ($\sin \Theta = 1$), tvingas elektronen att röra sig i en cirkelformig bana, vars plan är vinkelrätt mot fältlinjerna. Banradien ϱ cm fås ur kraftekvationen

$$B\frac{e}{c}v = m\frac{v^2}{\varrho}, \text{ som ger } \varrho = \frac{mv}{Be/c}.$$

Tiden T_c sek, som elektronen behöver för att genomlöpa ett varv, blir

$$T_c = \frac{2\pi\varrho}{v} = \frac{2\pi m}{Be/c}.$$

Sålunda är T_c liksom vinkelhastigheten ω_c (cyklotronfrekvensen) och omloppstalet f_c oberoende av ϱ och v och bestämmes av den magnetiska induktionen ensam.

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi\frac{1}{T_c} = \frac{e/c}{m}B.$$

I en magnetron röra sig elektronerna i vakuum i ett *sammansatt elektriskt och magnetiskt fält* med de båda fältvektorerna vinkelräta mot varandra (korsade fält).

Fig. 1 framställer en *plan likströmsmagnetron.* En sådan utgör ett idealiserat fall, men dess teori bildar en lämplig utgångspunkt för en elementär behandling av de mera komplicerade magnetronerna. Elektroderna äro stora, plana, med varandra parallella ytor. Vi studera nu en elektrons rörelse mellan dessa ytor, och för enkelhetens skull bortse vi från rymdladdningen mellan dem, dvs. vi anta, att potentialfördelningen i rummet mellan elektroderna är densamma som då inga elektroner finnas där. Med figurens beteckningar (katodytan i xz-planet, elektriska fältstyrkan riktad i negativ y-led, magnetiska induktionen riktad i negativ z-led) fås rörelseekvationerna:

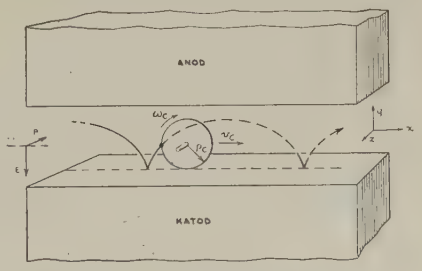


Fig. 1. Plan likströmsmagnetron. Banan för en elektron, som invid katodytan har hast. = 0, blir en cykloid.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{c}B\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = eE - \frac{e}{c}B\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Vi anta nu, för att förenkla räkningarna, att elektronen startar från origo med hastigheten = 0. Detta innebär intet svårare fel, eftersom elektroner, som emitteras från en glödkatod, ha tämligen liten genomsnittlig utgångshastighet. Med detta begynnelsevillkor få vi genom integration:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eB}{mc} y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{eE}{m} t - \frac{eB}{mc} x, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Genom insättning av uttrycken för dx/dt och dy/dt i de två första rörelseekvationerna fås:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{eB}{mc}\right)^2 x + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{EB}{c} t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{eB}{mc}\right)^2 y + \frac{eE}{m}.$$

Dessa differentialekvationer äro av välkänd typ. Lösningarna bli

$$x = v_c t - \varrho_c \sin \omega_c t = \varrho_c(\omega_c t - \sin \omega_c t), \quad y = \varrho_c(1 - \cos \omega_c t),$$

där

$$v_c = \frac{cE}{B}, \quad \varrho_c = \frac{mc^2 E}{eB^2}, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}.$$

Elektronbanan är sålunda en cykloid. Rörelsen kan anses sammansatt av en rätlinjig rörelse med hastigheten v_c i x-axelns riktning, vinkelrät mot både $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$, och en cirkulär rörelse i xy-planet med radien ϱ_c och vinkelhastigheten ω_c (cyklotronfrekvensen). Cykloidbanan kan anses genererad av en punkt på periferien av en rullande cirkel med radien ϱ_c.

Cykloidbanans toppar ligga på avståndet $2\varrho_c$ från katoden. Om därför $2\varrho_c \geq$ elektrodavståndet d cm, komma de från katoden emitterade elektronerna att uppfångas av anoden, och ström går fram i den yttre kretsen, som sluter anod och katod. Men om man med fix anodspänning ökar den magnetiska induktionen, inträffar det vid ett visst kritiskt värde B_c att strömmen tvärt upphör (jfr uttrycket för ϱ_c), beroende på att cykloiden nu inte når upp till anoden ($2\varrho_c < d$). Betecknas anodspänningen med V erg/ese (1 erg/ese $\approx$ 300 volt), får man, då $V = Ed$, för $2\varrho_c = d$ följande samband (den s. k. cut-off-relationen):

$$V = \frac{eB_c^2 d^2}{2mc^2}.$$

Elektronen upptar energi från det elektriska fältet under det att den beskriver den uppåtgående delen av cykloidbågen; denna upptagna energi avges åter till fältet på den nedåtgående delen av bågen. Om banan utgöres av *fullständiga* bågar, är sålunda det resulterande energiutbytet mellan elektronen och det statiska fältet

lika med noll. Det magnetiska fältet har ingen inverkan på elektronens rörelseenergi, eftersom den kraft, som detta fält utövar på elektronen, alltid är vinkelrät mot rörelseriktningen. Det är av vikt för förståelsen av magnetronoscillatorernas verkningssätt att hålla i minnet, att energiutbyten äga rum endast mellan elektronerna och det *elektriska* fältet.

Den *cylindriska likströmsmagnetronen* (fig. 2) utgöres av ett cylindriskt anodbleck, inuti vilket en glödtråd är axiellt uppspänd, och elektrodanordningen är innesluten i ett högevakuerat glasrör.

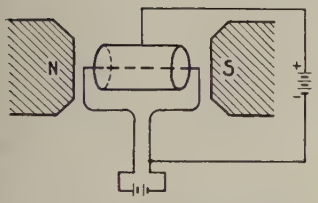


Fig. 2. Cylindrisk likströmsmagnetron. Kopplingsschema.

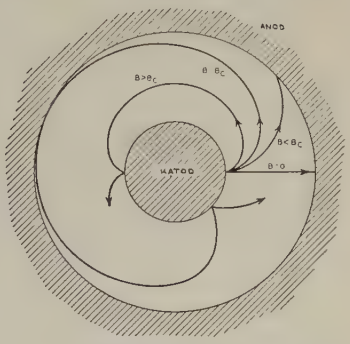


Fig. 3. Elektronbanor i en cylindrisk likströmsmagnetron vid olika *B*-värden. Elektronerna antagas emitterade med initialhast. = 0. Magnetfältet antages riktat vinkelrätt utåt.

Röret är placerat i ett homogent magnetfält. Elektronerna, som emitteras från katoden, röra sig sålunda i mellanrummet mellan två koaxiala cylinderytor; det elektriska fältet är radiellt och det magnetiska axiellt. Den matematiska behandlingen av detta fall är inte särskilt komplicerad men för utrymmeskrävande för att kunna tas med här.[1] En elektrons bana blir med samma förenklande antaganden som förut approximativt en epicykloid i ett plan vinkelrätt mot cylinderaxeln (fig. 3). Epicykloiden kan tänkas genererad av en punkt på periferien av en cirkel, som rullar på den cylindriska katoden. Banan är inte en exakt epicykloid, därför att den radiella rörelsen inte är enkelt harmonisk, beroende på att den elektriska fältstyrkan varierar utefter radien. Emellcr-

[1] Den cylindriska likströmsmagnetronen brukar kallas Hulls magnetron efter amerikanen A. W. HULL, som först publicerade en teori för den (1921). Dylika rör hade emellertid konstruerats och studerats experimentellt långt tidigare.

tid bli uttrycken för den rullande cirkelns radie ϱ_c, dess medelpunkts hastighet v_c och cyklotronfrekvensen ω_c approximativt desamma som för cykloiden i det plana fallet, och approximationerna bli bättre i den mån förhållandet mellan katod- och anodradierna ökar. Cut-off-relationen kan visas vara

$$V = \frac{eB_c^2 r_a^2}{8mc^2}\left[1 - \left(\frac{r_k}{r_a}\right)^2\right]^2,$$

där r_a och r_k beteckna anodens resp. katodens radier. För $r_k \ll r_a$ blir

$$V = \frac{eB_c^2 r_a^2}{8mc^2},$$

ett samband som är lätt att kontrollera experimentellt. Man finner, att överensstämmelsen inte är särskilt god. Såsom framgår av karakteristiken i fig. 4 får man ingen skarp cut-off; kurvan är avrundad, och en relativt kraftig ökning av magnetfältet fordras för att strömmen skall upphöra. Denna bristande överensstämmelse beror bl. a. på att ingen hänsyn tagits till elektronernas utgångshastighet, vilken är genomsnittligt större vid närvaro av magnetfält, men orsakerna äro flera andra, som här inte skola diskuteras.[1]

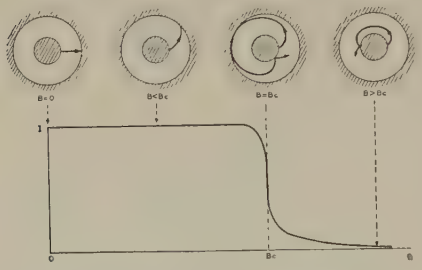


Fig. 4. Exempel på karakteristik (strömstyrkan I som funktion av magnetiska induktionen B vid konstant anodspänning) för cylindrisk likströmsmagnetron. Elektronbanorna för fyra olika B-värden visas över motsvarande områden av kurvan.

Vi skola nu visa, hur en likströmsmagnetron med lämpliga förändringar kan verka som generator av högfrekventa elektriska svängningar.

Man brukar skilja mellan tre huvudtyper av magnetronoscillatorer, nämligen *dynatron- eller Habannmagnetronen*,[2] *cyklotron-*

[1] En sträng magnetronteori kan f. ö. inte byggas upp med den klassiska elektricitetslärans hjälpmedel utan måste grundas på statistiska betraktelser. Magnetronen skiljer sig ju från vanliga elektronrör däruti, att närbelägna elektroner kunna vara på väg i olika riktningar; »elektronkollisioner» kunna sålunda äga rum.

[2] Efter tysken E. Habann, som förmodligen först diskuterade denna oscillatortyp (1924).

frekvensmagnetronen och *vandringsvågmagnetronen.* Den sistnämnda är den moderna typen, som användes i radar.

Fig. 5 framställer principschemat för en *Habannoscillator.* Den cylindriska anoden är slitsad parallellt med axeln i två segment. Mellan dessa segment är en svängningskrets inkopplad.[1] Vi anta till att börja med, att kretsen svänger. Det elektriska fältet sammansättes sålunda av ett radiellt, konstant fält mellan anod och katod, härrörande från likspänningskällan, och ett växelfält mellan anodsegmenten. Med lämplig dimensionering kan man åstadkomma, att elektronbanorna alltid sluta på det segment, som har den *lägre* potentialen (fig. 6), oberoende av vilket segment elektronerna ursprungligen startat emot.[2] Elektronbanan skall genom-

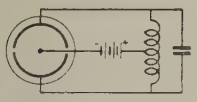


Fig. 5. Habann-oscillator.

löpas på så kort tid, att växelfältet därunder inte hinner att nämnvärt förändras. Elektronerna, som få sin energi från det statiska fältet, drivas i riktning mot växelfältets kraftkomponent och avge energi till växelfältet. Detta tillföres sålunda ständigt energi från det statiska fältet genom elektronernas förmedling, varför anordningen är självsvängande. Såsom framgår av fig. 6, användes ett värde på den magnetiska induktionen, som avsevärt överstiger B_c-värdet; eB/mc måste vara $\gg\omega_c$. Med magnetroner av denna typ

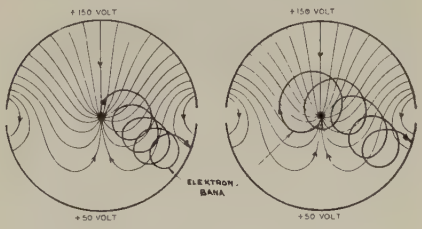


Fig. 6. Banor för två elektroner som startat mot motsatta anodsegment i en Habannmagnetron. Katodens potential = 0. De på resp. segment angivna spänningarna äro summan av lik- och växelspänningarna i ifrågavarande ögonblick. Det elektriska fältet är åskådliggjort medelst kraftlinjer.

[1] Spolen och kondensatorn i fig. 5 böra uppfattas som symboler för resonanskretsens induktans och kapacitans. Svängningskretsen kan vid lägre frekvenser bestå av en spole och en kondensator men måste vid högre frekvenser utgöras av en resonator av annat slag, vilken vanligen är innesluten i samma glasballong som elektrodsystemet.

[2] Habannmagnetronen kallas dynatronoscillator av det skälet, att den erbjuder den yttre svängningskretsen ett »negativt motstånd» (elektronströmmen inuti magnetronen går mot anodsegmentet med den lägre potentialen). Elektriska svängningar, som åstadkommas med hjälp av kopplingselement med »negativt motstånd», kallas allmänt för dynatronsvängningar.

har man kunnat generera svängningar upp till 1000 Mc/sek ($\lambda = 30$ cm). Uteffekter på 100 watt vid 600 Mc/sek ha uppnåtts. Typen är inte så lämplig som mikrovågsoscillator, därför att den fordrar mycket starka magnetfält inom detta område.

Tjecken A. Zaçek upptäckte 1924, att svängningar kunna uppstå mellan anod och katod i likströmsmagnetronen, om magnetiska induktionen är nära $= B_c$. Svängningarnas period är nära lika med den tid en elektron behöver för att löpa från närheten av katoden till närheten av anoden och tillbaka till katoden. Deras

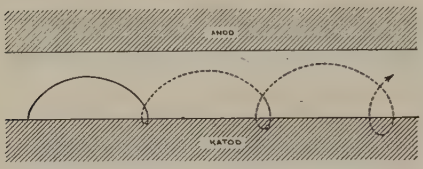


Fig. 7. Ungefärlig bana för en elektron som upptar energi från växelfältet i en cyklotronfrekvensmagnetron. Den streckade kurvan visar fortsättningen av banan för den händelse elektronen inte stoppats upp av katoden; elektronen skulle då fortsätta att beröva växelfältet energi.

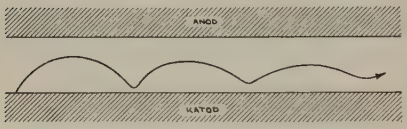


Fig. 8. Ungefärlig bana för en elektron som avger energi till växelfältet i en cyklotronfrekvensmagnetron. Om elektronen efter att ha förlorat all sin energi får stanna kvar i fältet, kan den komma att ta upp energi från växelfältet och genomlöpa en cykloidbana, som är omvändningen till den angivna.

cirkelfrekvens överensstämmer med vinkelhastigheten hos elektronernas rotationsrörelse, dvs. den är approx. $= \omega_c$ (sid. 172). Man kallar därför denna oscillator för *cyklotronfrekvensmagnetron.*

Vi diskutera elektronmekanismen för det plana fallet. Det statiska fältet i fig. 7 tänka vi oss överlagrat av det högfrekventa växelfältet, vars period, såsom ovan sagts, är approx. lika med elektronlöptiden för en båge. En elektron, som startar från katoden i sådan fas, att den accelereras av växelfältet, dvs. upptar energi från detta, kommer att uppta energi även på återvägen; dess energi är sålunda större vid återkomsten till katoden, där den stoppas upp, än vid starten. En elektron däremot, som lämnar katoden i motsatt fas, förlorar energi till växelfältet såväl på vägen mot anoden som på återvägen (fig. 8). Den förmår därför inte att nå tillbaka till katoden (bågen blir ofullständig, jfr sid. 172) utan startar en ny båge med mindre amplitud. Denna procedur upprepas, till dess att växelfältet absorberat elektronens hela rotationsenergi. Totalt får växelfältet ständigt tillförsel av energi,

som via elektronerna tas från det statiska fältet, och oscillationerna kunna hållas i gång, ty de »rättfasiga» elektronernas verkan överväger, eftersom de avge energi under flera cykler, medan de »felfasiga» avlägsnas ur fältet efter att ha genomlupit endast en cykel. En rättfasig elektron kan, sedan den förlorat sin energi, i fortsättningen bli felfasig, därför att rotationsrörelsen kan byggas upp på nytt och elektronen då kommer att accelereras av växelfältet. Man kan därför tänka sig en ökning av effekten, därigenom att de rättfasiga elektronerna avlägsnas ur fältet, så snart de gjort sin tjänst. Genom speciella arrangemang är detta också möjligt,

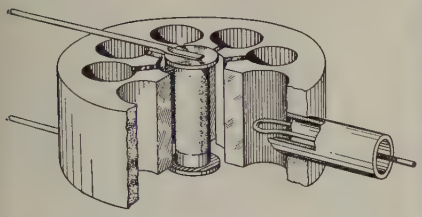


Fig. 9. Schematisk bild av elektrod- och resonatorsystemet i den engelska multipelresonatormagnetronen av 1940. Åtskilliga andra typer av resonatorsystem och anordningar för effektuttag ha utvecklats.

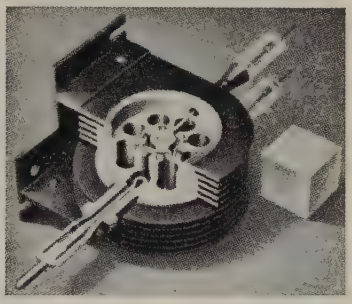


Fig. 10. Samma magnetron som i fig. 9 delvis uppskuren. Anodblocket, som är anslutet till den yttre kåpan, skall ha 0-potential, katoden hög negativ potential. Jämförelsekuben har kantlängden = 1 tum.

men av olika skäl har denna typ dock inte kunnat utvecklas till en högeffektmagnetron. En olägenhet är det kraftiga elektronbombardemanget av katoden. Är denna en oxidkatod, blir dess livslängd kort.

Magnetroner med slitsade anoder, som svänga på likartat sätt, ha också konstruerats; med ett sådant rör lyckades amerikanerna C. E. Cleeton och N. H. Williams att generera strålning av så kort våglängd som 0,64 cm (1936). Cyklotronfrekvensmagnetronen har numera nästan ingen teknisk användning.

I en magnetron kunna svängningar uppstå, som äro vare sig Habannsvängningar eller cyklotronfrekvenssvängningar. Detta var känt före kriget, och elektronmekanismen för denna tredje typ av svängningar hade i huvudsak klarlagts genom undersökningar av engelsmannen K. Posthumus (1935) och tyskarna F. Herriger

och F. Hülster (1937). Man hade också konstruerat magnetroner, *vandringsvågmagnetroner*, grundade på denna svängningstyp, för så kort våglängd som 75 cm. Effekten var dock, som hos alla förkrigsmagnetroner, tämligen liten, troligen därför att man saknade en god resonator och använde för små katoder. Den berömda engelska 10-cm-magnetronen av år 1940 var en förbättring av denna magnetrontyp, och denna engelska konstruktion utgör

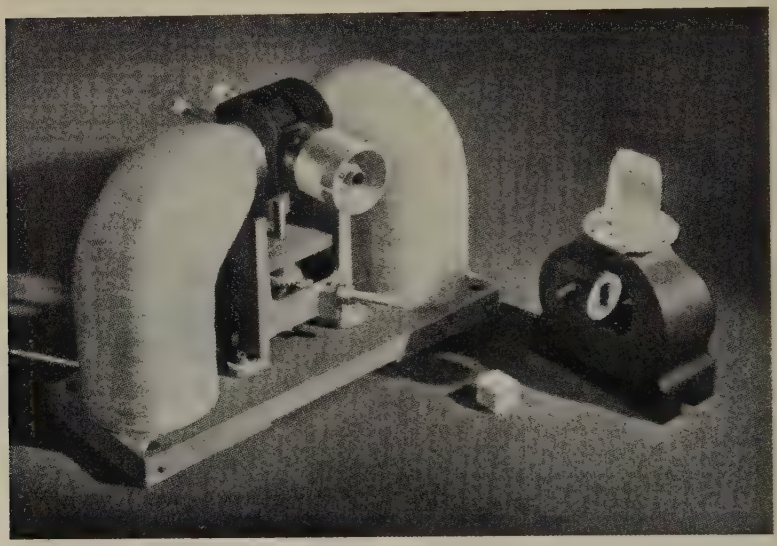


Fig. 11. Ett par impulsmagnetroner med tillhörande magneter (1000 kW, 2800 Mc/sek resp. 55 kW, 9375 Mc/sek).

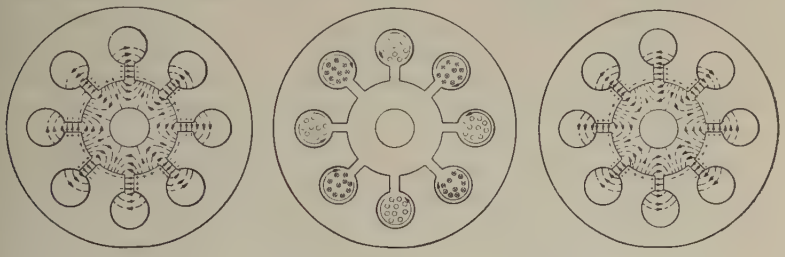
prototypen för de moderna högeffektiva vandringsvågmagnetronerna.

Fig. 9 visar elektrod- och resonatorsystemet i den engelska multipelresonatormagnetronen. Ett cylindriskt kopparblock innehåller ett cylindriskt centrumhål, vars inre yta utgör anod. I centrumhålet är placerad en indirekt upphettad oxidkatod,[1] vars diam. är ungefär hälften av hålets. Blocket innehåller dessutom 8 st exakt lika, cylindriska urborrningar, ordnade i ring. Dessa

[1] Katodemissionen i en högeffektmagnetron kan uppgå till 50 amp/cm², vilket är ca 100 gånger så mycket som i ett vanligt elektronrör. Det har sålunda lyckats katodforskarna att framställa sådana katoder, men man har ännu inte lyckats förklara, hur en elektronemission av denna ofantliga storlek är möjlig.

äro förbundna med anod-katodrummet medelst slitsar, vilka sålunda dela anodytan i segment. Alternerande segment äro sammankopplade medelst metallstroppar (fig. 10). Var och en av de nyckelhålsliknande urborrningarna är en s. k. hålrumsresonator.[1] En dylik verkar som en svängningskrets; hålet motsvarar induktansen och skåran kapacitansen (i stort sett). Nyckelhålsformen liksom resonatorernas antal är inte väsentlig utan kan varieras. Effekten tas ut via en koaxialledare[2] medelst en magnetisk kopplingsslinga, placerad i ett av resonatorhålen.

Fig. 11 visar ett par magnetroner med tillhörande magneter. Driftsspänningarna för högeffektmagnetroner ligga mellan 1 och 40 kV. Genomföringarna måste därför vara väl isolerade från den



a. *b.* *c.*

Fig. 12. Fältbilder för ett svängande resonatorsystem. *a*) Laddningstätheten på anodsegmenten är maximum. *b*) Fältbilden 1/4 period senare. Det elektriska fältet har försvunnit, ström av maximal styrka flyter utefter resonatorernas insidor, magnetfältet är maximalt. *c*) Fältbilden efter ytterligare 1/4 period.

yttre metallkåpan och dessutom vakuumtäta. För isolationen användes glas eller keramik, smält direkt till metallen. Styrkan av de använda permanentmagneterna ligger mellan 600 och 15000 gauss.

Ett resonatorsystem enligt fig. 9 kan svänga på flera olika sätt. I allmänhet kan fasdifferensen mellan angränsande resonatorer i ett system av N resonatorer anta värdena $2\pi n/N$ ($n = 0, 1, 2, .., N/2$).

[1] För förståelsen av mikrovågsrören är någon kännedom om teorien för hålrumsresonatorer och vågledare nödvändig. En utmärkt, översiktlig framställning är U. Ingård, Från kvasistationära svängningskretsar till vågledare och hålrumsresonatorer. Populär Radio *18*, 170, 194, 259, 282, 1946; *19*, 8, 1947.

[2] Vid frekvenser över 3000 Mc/sek tas effekten ut (utan slinga) via en rektangulär transmissionskanal, s. k. vågledare (»waveguide»), som är förbunden med resonatorhålet medelst en skåra på hålets baksida; mycket högfrekventa elektriska vågor måste ledas i slutna metallrör.

Vi skola inskränka oss till att behandla det fall, då fasförskjutningen är $= \pi$; det elektriska växelfältets kraftlinjer mellan angränsande anodsegment äro då symmetriska. Denna svängningstyp, π-typen, är den effektivaste; uppkomsten av övriga typer söker man undertrycka medelst olika arrangemang (stropparna mellan anodsegmenten bidra härtill). Fig. 12 visar fältbilden i resonatorsystemet i tre olika tidsmoment och fig. 13 magnetfältet, då detta är av maximal styrka.

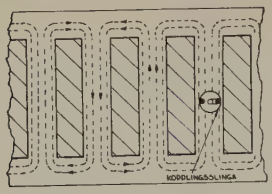


Fig. 13. Magnetfältet, sett från katoden, i tidsmomentet *b*) enl. fig. 12. De magnetiska fältlinjerna koppla samman angränsande resonatorer.

Växelfälten i anod-katod-rummet variera på ett sådant sätt, att man kan säga, att en fältvåg vandrar runt systemet (därav benämningen vandringsvågmagnetron). För svängningar av π-typen är fältvågen en stående våg.

Förutsättningen för självsvängning är som förut, att mera energi avges till växelfältet av elektroner, som retarderas av detta, än som upptages av elektroner som accelereras; energien tas från det statiska fältet. Förhållandena äro här något mera komplicerade än i cyklotronfrekvensmagnetronen, eftersom växelfältet utom en radiell också har en *tangentiell* komposant.

En elektron, som startar från en punkt på katoden, då växelfältet där är accelererande, kommer att beskriva en enda båge (fig. 14—15) och kommer att återvända till katoden med avsevärd energi; den spelar ingen vidare roll i processen utom möjligen därigenom, att den slår ut ett antal sekundärelektroner. Den representerar emellertid en energiförlust för växelfältet.

En elektron, som startar från en punkt med retarderande växelfält (fig. 14 och 16), kommer att beskriva en fleröglig cykloidliknande bana och därunder avge energi till växelfältet.

Vi studera en sådan elektrons rörelse närmare. Vi bortse därvid från den första delen av banan och betrakta det allmänna fallet, då en rättfasig elektron befinner sig i rymdladdningen mellan katod och anod. Från katoden sett rör den sig translatoriskt runt katoden. Antag, att elektronen befinner sig mitt för en skåra, då växelfältets tangentiella komposant där är maximalt retarderande. Den förlorar under passagen förbi denna skåra en viss kvantitet energi till växelfältet. Förutsättningen för att den skall lida en maximal energiförlust, då den flyger förbi nästa skåra, är att även där fältet är maximalt retarderande. Tydligen

måste elektronen tillryggalägga sträckan på tiden $\left(p+\frac{1}{2}\right)T$, där $p=0,1,2,\ldots$ och T är växelfältets period. Elektronens genomsnittliga vinkelhastighet, sett från katoden, blir

$$\frac{2\pi}{N\left(p+\frac{1}{2}\right)T}=\frac{2\pi f}{N\left(p+\frac{1}{2}\right)},$$

där f är växelfältets frekvens. Denna genomsnittliga vinkelhastighet skall elektronen ha för att kunna arbeta på gynnsammaste sätt. Den är då i takt med växelfältet och kommer att avge successivt till detta den potentiella energi, som den har på grund av sin belägenhet i det statiska fältet, och hamnar slutligen på

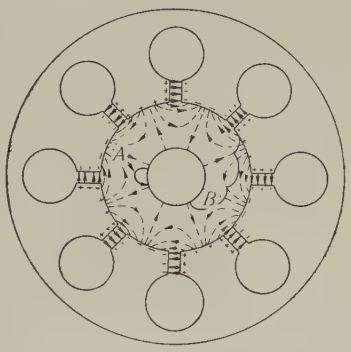


Fig. 14. Elektronbanor i en vandringsvågmagnetron vid närvaro av ett högfrekvent växelfält. En felfasig elektron återvänder till katoden (*A*). En rättfasig elektron beskriver en loopingbana i anod-katod-rummet (*B*); sett från systemets centrum rör den sig på en cirkelbåge med approx. konstant vinkelhastighet.

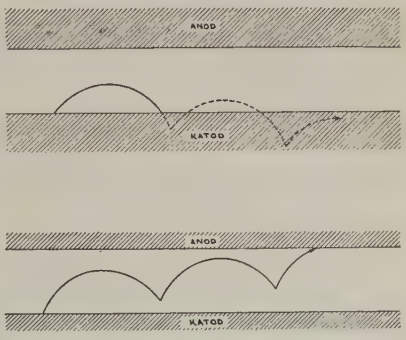


Fig. 15. Ungefärlig bana för en elektron som upptar energi från växelfältet i en vandringsvågmagnetron (för enkelhetens skull återgiven för det oslitsade, plana fallet). Fältet antages vandra åt höger; dess med elektroderna parallella komposant orsakar, att elektronbanan böjer av snabbare än vid enbart radiellt fält. Jfr fig. 7.

Fig. 16. Ungefärlig bana för en elektron som avger energi till växelfältet i en vandringsvågmagnetron i det plana fallet. Energiförlusten är en förlust av potentiell energi i det statiska fältet. Rotationsenergien är opåverkad (bågarna äro fullständiga). Jfr fig. 8. Elektronen stannar längre i fältet än den felfasiga elektronen i fig. 15.

anoden. Mekanismen är här alltså en annan än i cyklotronfrekvensmagnetronen. Den genomsnittliga drifthastigheten runt katoden är avgörande. Denna hastighet är approx. lika med hastigheten v_c hos den »rullande cirkelns» centrum (sid. 172); $v_c = cE/B$ (E = den radiella, statiska fältstyrkan). Vi kunna därför få ett annat approximativt uttryck för den genomsnittliga vinkelhastigheten genom att beräkna vinkelhastigheten, då elektronen befinner sig mitt i anod-katod-rummet. Denna blir med de vanliga beteckningarna:

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}(r_a + r_k)} = \frac{\frac{c}{B}E}{\frac{1}{2}(r_a + r_k)} = \frac{\frac{c}{B}\frac{V}{r_a - r_k}}{\frac{1}{2}(r_a + r_k)} = \frac{2cV}{(r_a^2 - r_k^2)B}.$$

Genom kombination med det förut härledda uttrycket få vi som approx. villkor för att magnetronen skall svänga:

$$V = \frac{\pi f}{N\left(p + \frac{1}{2}\right)} \frac{B}{c} r_a^2 \left[1 - \left(\frac{r_k}{r_a}\right)^2\right].$$

Elektroner, som röra sig runt katoden i takt med växelfältet, avge alltså sin potentiella energi till detta. Elektroner, som äro ur takt, både avge och uppta energi, varför deras genomsnittliga bidrag är = 0. Genom en fasfokusserande verkan av fältets radiella komponent komma emellertid elektroner, som äro nära i takt, att i viss utsträckning rättas in, varför många fler elektroner än de exakt rättfasiga bidra till energiförsörjningen. Av samma skäl är konstansen hos anodspänning och magnetfält inte så kritisk.

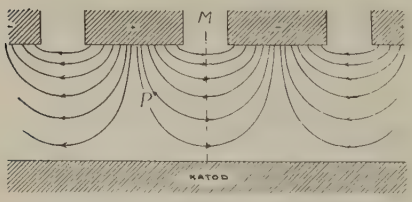


Fig. 17. Återger resulterande elektriska fältet i en vandringsvågmagnetron, då växelfältet är maximalt mitt emellan två skåror. Elektronrörelsen antages ske åt höger. Elektronen i punkten P, som inte är exakt rättfasig, rättas in.

Den fasfokusserande mekanismen kan förklaras med hjälp av fig. 17. En exakt rättfasig elektron passerar planet M mitt emellan anodsegmenten, då fältet där är maximalt retarderande. Den radiella fältkomponentens resulterande inverkan på hastigheten under passagen förbi skåran är lika med noll. En annan elektron, som vid tidsmomentet i fråga ligger något efter, befinner sig t. ex. i punkten P. Efter denna tidpunkt är växelfältkomponenten min-

skande. Verkan av fältets radiella komponent är alltså mindre efter passagen av skåran än före. Den resulterande verkan blir en ökning av translationshastigheten (uträtning av cykloidbågen), som bringar elektronen närmare den riktiga fasen. Genom ett liknande resonemang finner man, att en elektron, som ligger något före, på motsvarande sätt rättas in.

Vi ha hittills betraktat rörelsen hos individuella elektroner. Men dessa tillhöra ju rymdladdningen, dvs. den totala mängden av elektroner, i anod-katod-rummet. Vi skola nu se, hur denna rymdladdning som helhet beter sig. Då magnetronen inte svänger utan endast det statiska elektriska fältet är närvarande, har rymdladdningen formen av en med katoden koaxial cylinder, vars yttre mantel ligger ungefär mitt i anod-katod-rummet. Sedd i magnetfältets riktning, roterar den medurs runt katoden, eftersom de enskilda elektronerna röra sig i denna led (jfr fig. 1). Vid närvaro av växelfält sker en distortion av rymdladdningen, så att den antar formen av ett roterande skovelhjul (fig. 18), som i vårt fall ($N = 8$, π-svängningar) har fyra armar. Detta är utan vidare klart från det föregående resonemanget. De felfasiga elektronerna måste röra sig i närheten av katoden, medan de rättfasiga och nära rättfasiga nå fram till anoden. Skovelhjulet roterar synkront med växelfältet. Dessa roterande armar inducera svängningarna i resonatorsystemet och utgöra ledare för likströmmen mellan anod och katod.

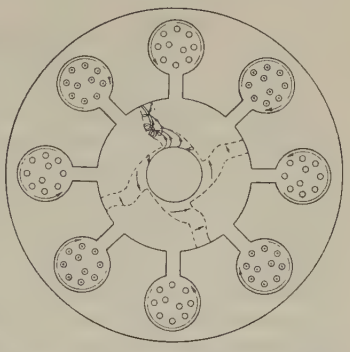


Fig. 18. Den roterande rymdladdningen i en svängande vandringsvågmagnetron. Några individuella elektronbanor äro utritade.

Teorien för magnetronerna har här utvecklats i huvudsak kvalitativt och grundats på energibetraktelser. Den stränga teorien är ytterligt komplicerad och beträffande vandringsvågmagnetronerna långt ifrån färdig.

Högeffektmagnetronerna drivas, beroende på ändamålet, antingen med konstant, modulerad eller pulserande likspänning. Impulsbredden i senare fallet är vanligen av storleksordningen μsek och impulsavståndet av storleksordningen 1000 μsek. Då svängningarna måste starta för en pålagd spänningsimpuls, pågå någon μsek, därefter upphöra och sedan starta på nytt för nästa

impuls, måste magnetronen anses vara en synnerligen förnämlig generator. Verkningsgraden kan vara upp till 85 %, vilket är lika bra som för de bästa omformarna inom kraftfrekvensområdet. Magnetronerna kunna av naturliga skäl inte konstrueras för godtyckligt variabel frekvens; de byggas antingen för fast frekvens eller med möjlighet till mindre frekvensvariation. Den vänstra magnetronen i fig. 11 är försedd med anordning för frekvensvariation.

Utvecklingsarbetet på magnetronområdet pågår fortfarande intensivt. Förbättrade konstruktioner, nya tillämpningar och teoretiska undersökningar publiceras i rask takt.

Bokanmälningar.

F. Carlson, *Lärobok i Geometri.* Andra delen. C. W. K. Gleerups förlag, Lund 1947, 349 s., häft. kr. 16: 50 (Första delen 1943, nytryck 1946, rec. Elementa sept. 1943.).

Av professor Fritz Carlsons lärobok i geometri har nu även del II utkommit. Det fåtaliga beståndet av läroböcker i matematik för universitetsstadiet på svenska språket har därmed fått ett värdefullt tillskott. Denna del ägnas, om man bortser från några sporadiska utnyttjanden av konstruktioner i rummet, helt åt plangeometriska problem. Metoderna äro analytiskt-geometriska med såväl algebraiska som differentialgeometriska betraktelser. Allmänna, snedvinkliga parallellkoordinataxlar användas med ömsom inhomogena ömsom homogena koordinater. Såväl punkt- som linjekoordinater begagnas. Syntetiska metoder förekomma sparsamt. Samband som erhållits ur en syntetisk betraktelse givas snarast en analytisk form. Enhetlighet i metoderna har ej eftersträvats.

Boken inledes med ett kapitel om determinanter och deras användningar. Därefter följer en behandling av affina transformationer i planet och centralprojektion av ett plan på ett annat plan, varvid de oändliga elementen definieras. Efter införandet av homogena punktkoordinater och en antydan om den geometriska tolkningen av imaginära storheter behandlas algebraiska kurvor genererade av sina punkter (skärning, tangenter, singulära punkter). Därefter äro inskjutna några paragrafer om pol- och polarteorien för andragradskurvor, Pascals och Brianchons teorem, samt involutionen i punktraden och i strålknippet. Sedan författaren inlett följande kapitel med en kort anmärkning om att punkter och räta linjer äro likvärdiga grundläggande element,

med vilkas hjälp geometrien i planet uppbygges, införas linjekoordinater; dualitetsprincipen i planet framhäves och exemplifieras medelst en rad parallella satser, och den duala motsvarigheten mellan en punktkurva av ordningen n och en linjekurva av klassen n realiseras medelst en av en andragradskurva bestämd polarreciprocitet. Författaren har därmed redskapen färdiga för en fortsättning av studiet av de algebraiska kurvorna, varvid såväl punkt som linjesingulariteter betraktas. Närmekurvor för kurvorna i omgivningen av ändliga respektive oändliga singulära punkter bestämmas. Teorierna för evolutor, evolventer, envelopper, oskulerande kurvor givas i traditionell form. Boken avslutas med ett kapitel om projektiva system. Efter att ha erhållit perspektiva system i planet genom att vrida det ena av två i rummet perspektiva plana system, tills de infalla i samma plan, betraktar författaren projektiva punktrader, projektiva strålknippen, projektiv alstring av andragradskurvor samt projektiva punktsystem på en andragradskurva. Allra sist definieras projektiva plana system analytiskt. — Framställningen berikas av en stor mängd intressanta exempel, dels sådana som äro i detalj utredda, dels övningsexempel med kommentarer och svar. Allt är med stor omsorg genomfört.

Boken saknar förord. Ingen enda litteraturanvisning finnes. En inledande översikt, som angivit målsättningen och den princip, efter vilken de till behandling upptagna geometriska problemen valts ut, skulle säkert varit nyttig. Dispositionen av materialet förefaller icke självklar. Någon säkrare grund än skolkunskapernas syntetiska geometri har ej givits. Någon axiomatisk uppbyggnad och därmed följande axiomatisk disposition har ej eftersträvats och har väl även på detta stadium icke ansetts pedagogiskt möjlig. Satser av rent projektiv natur bevisas med stöd av metriska betraktelser. Däremot framhålles i många fall, att vissa egenskaper hos bilderna äro oförstörbara vid affina respektive perspektiva transformationer. Till en klar klassificering av bildernas egenskaper — i projektiva, affina och metriska — når dock framställningen icke fram. Den elementära och grundläggande Desargues sats omnämnes i såväl del I som i del II endast som ett exempel. Man kan kanske ifrågasätta, om icke vissa bevis kunnat göras icke blott principiellt mera tilltalande utan även enklare, om problemet först givits en elementär projektivgeometrisk form. Jag tänker t. ex. på § 31.

Boken innehåller säkerligen åtskilligt, som icke är avsett att ingå i den obligatoriska kursen för cum laude i ämbetsexamen. Det är kanske dock ej så lätt för den studerande att här draga

gränsen mellan det nödvändiga och det icke nödvändiga. Å andra sidan borde väl en lärobok i geometri på universitetsstadiet innehålla något om de geometriska axiomen. Boken innehåller icke någon analytisk rymdgeometri. Huruvida denna är avsedd att behandlas i en tredje del är ej nämnt. Rymdgeometrien kan väl ej uteslutas ur kursen.

För den med alla sina rika detaljer omsorgsfullt utarbetade framställningen av teorier, som annars icke äro lätt tillgängliga för studenten, måste man vara professor Carlson stor tack skyldig.

Olof Stenström.

Gaston Julia, *Cours de Géométrie,* Gauthier-Villars, Paris 1941, 508 s., 600 fr.

Bakom titeln »Lärobok i geometri» kan ju dölja sig de mest olikartade saker: axiomatisk geometri, projektiv geometri, tillämpad algebra, tillämpad infinitesimalkalkyl m. m. Föreliggande bok är avsedd som kursbok för de studerande vid École Polytechnique i Paris. Den innehåller en avdelning om vektorkalkyl och en om punkters och kroppars rörelser. Huvuddelen av boken ägnas dock åt differentialgeometri, både plana kurvor, rymdkurvor och ytor behandlas.

Framställningen är fyllig och stödes av ett stort antal figurer, men kan knappast, vare sig i fråga om överskådlighet i dispositionen eller klarhet i enskildheterna, mäta sig med motsvarande partier i t. ex. de La Vallée Poussins »Cours d'Analyse».

Som tillämpning på ovannämnda geometrikurs har samme förf. (på samma förlag) utgivit även Exercices de Géométrie, varav del I utkommit 1944 (250 s., 180 fr.). Den innehåller 29 problem, examensfrågor av fransk typ, med allsidigt belysande, utförliga lösningar.

Sven Hilding.

M. G. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics.* Griffin & Co., London 1945 och 1946. Vol. I, Second ed. revised, Pp. 457, 50 s.; Vol. II, Pp. 521, 42 s.

Detta arbete var från början avsett att skrivas av flera författare. Krigsutbrottet omintetgjorde planen och verket utfördes av Kendall ensam — en enastående prestation i betraktande av den väldiga samling vetande, som här sammanförts. Allt i denna bok har stora dimensioner: formatet och sidantalet äro stora, exemplen äro många och formlerna långa — alltför långa ibland. Författaren har velat framställa de numera klassiskt vordna delarna av den matematiska statistiken och dessutom, så långt detta nu låter sig

göra, systematisera de resultat, som vunnits på senare år inom ämnets mera svårtillgängliga domäner.

Det förra har han främst ägnat första delen åt. Där finns läroböckernas vanliga ingredienser i delvis nya proportioner, litet sannolikhetsteori, frekvensfunktioner och karakteristiska funktioner i teori och praktik, medelfel, χ^2-fördelningen och korrelationsteori. Kapitlet om rangkorrelation ger ett viktigt bidrag till lösningen av ett svårbemästrat problemkomplex.

Andra delen är en enda väldig utläggning av statistikens grundfråga: hur skall man ur ett eller flera stickprov kunna bestämma den bakomliggande fördelningens egenskaper? Frågan kan preciseras eller inskränkas på olika sätt, och vi få som svar estimations- och hypotesprövningsteori, signifikanstests, varians- och tidsserieanalys. Allt detta behandlar Kendall lärt och grundligt, avväger lovvärt teori mot tillämpning och ställer sig strängt neutral till ännu oavgjorda stridsfrågor.

Man kan diskutera ett och annat i boken, icke bara detaljer utan även huvudlinjer. Det må vara nog att invända mot att sannolikhetsbegreppet införts först på ett sent stadium (kap. 7). Detta hindrar författaren från att ge den matematiska statistiken den karaktär av enhetlig lärobyggnad, som den trots sin mångfald och sin ungdom äger.

Sammanfattningsvis kan sägas, att Kendall med denna bok gett både teoretiker och praktiker ett förträffligt uppslagverk, som genom sin rika problemflora och — icke minst — sin digra litteraturförteckning stimulerar till vidare forskningar.

Gunnar Blom.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques. Hermann & Cie, Paris. Abonnement annuel 580 francs.

Denna livaktiga kvartalstidskrift började utgivas 1915 och är avsedd att på olika sätt underlätta kontakten mellan matematiker i olika länder. Huvuddelen av innehållet består av frågor och svar, mestadels sådana frågor som upphovsmannen icke själv kunnat besvara eller önskar få vidare utredda. Dessutom diskuteras spörsmål rörande prioritet, litteratur, kongresser och över huvud taget sådant, som kan bereda vägen för samarbetet matematiker emellan.

Bakom denna värdefulla publikation, som på ett utomordentligt sätt kompletterar sin amerikanska motsvarighet, Mathematical Reviews, står en grupp franska matematiker, som även på andra vägar söka skapa ett matematiskt centrum i Paris. De ha sålunda inrättat ett stort bibliotek, ett sekretariat, som samtidigt vill vara en matematisk rådgivningscentral, m. m.

Den som vill följa med vad som sker i den matematiska världen bör icke underlåta att stifta bekantskap med denna organisation. Tidskriftens adress är 55 rue de Varenne, Paris 7e.

Gunnar Blom.

Harold Jeffreys-Bertha Swirles Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics.* Cambridge Univ. Press 1946. Pp. 679. £ 3. 3s.

H. Jeffreys är »reader» i geofysik vid universitetet i Cambridge och är känd genom sina tidigare böcker »Cartesian Tensors», »The Earth: Its Origin, History, and Physical Constitution», »Operational Methods in Mathematical Physics» och »Theory of Probability», vars titlar vittna om hans mångsidighet. Till dessa har han nu i samarbete med sin maka fogat föreliggande digra volym, tydligen skriven i den prisvärda föresatsen att förena matematisk stringens med praktisk användbarhet. Författarna äro sympatiskt fria från all ringaktning för numeriska räkningar och ägna sålunda ett kapitel på 50 sidor uteslutande åt »Numerical Methods» — en intressant detalj är författarnas starka misstroende mot grafiska metoder, motiverat med »disastrous results of graphical methods in seismology». Bland övriga kapitelrubriker (i allt 25) märkas: »The Real Variable»; »Scalars and Vectors»; »Tensors»; »Matrices»; Operational Methods»; »Calculus of Variations»; »Functions of a Complex Variable»; »Contour Integration and Bromwich's Integral» (motto: »Go round about, Peer Gynt!»); »Fourier's Theorem»; »Solutions of Linear Differential Equations of the Second Order»; »The Equations of Potential Waves, and Heat Conduction»; »Waves in One Dimension and Waves with Spherical Symmetry» samt kapitel om olika speciella funktioner, som ofta förekomma i den matematiska fysiken osv. Något som man saknar är en behandling av de intressanta matematiska problem, som uppträda exempelvis i teorien för atomära stötprocesser. Men det kommer väl fler upplagor.

Boken är roligt skriven, rik på praktiska tillämpningar och övningsexempel och kommer nog att bli uppskattad inte bara av fysiker utan även av matematiskt intresserade tekniker.

L. Hulthén.

A. S. Eddington, *Fundamental Theory.* Cambridge University Press 1946. Pp. 292, 25 s.

Om av en recensent kräves, att han skall förstå det som han recenserar, skulle denna Eddington's sista bok förmodligen aldrig bli recenserad. Men ingenting förbjuder en att följa utgivarens,

Professor E. T. Whittakers, anvisning att slå upp sidorna 66, 105 osv. och häpna över den fantastiskt goda överensstämmelsen mellan de »härledda» och de experimentella värdena på naturkonstanterna e, h, osv. Tidigare har E. chockerat fysikervärlden och väckt opposition inom denna genom sitt försök att bevisa att inverterade värdet av finstrukturkonstanten $hc/2\pi e^2$ skulle vara ett naturligt tal = 137. Då det experimentella värdet (enl. Birge) numera är $137{,}030 \pm 0{,}016$ *kan* E. ha rätt. Men då neutronens magnetiska moment på s. 251 beräknas till 1,9371 kärnmagnetoner och jämföres med det observerade värdet $1{,}935 \pm 0{,}020$, blir man djupt besviken, om man vet, att värdet, enligt allra senaste uppgifter från Argonne-laboratoriet i U. S. A., är $1{,}9103 \pm 0{,}0012$. Härmed ingen förhastad dom över E:s verk! I de begripliga avsnitten i boken finner man för övrigt många fysikaliskt sunda och matematiskt originella synpunkter.

Nils Svartholm.

Félix Michaud, *Problèmes de Physique avec solutions expliquées.* 2 ed. Librairie Vuibert, Paris 1946, 204 s., 240 fr.

Det är med ett alldeles särskilt intresse man tar del av en samling övningsuppgifter i fysik, vilka äro försedda med utförliga lösningar och svar. Föreliggande exempelsamling är avsedd för »candidats au certificat d'études supérieures de Physique générale» och behandlar problem inom termodynamik, elektricitetslära och fysikalisk optik. Emedan uppgifterna äro valda med stor omsorg och genomgående behandla centrala problem, erhåller läsaren icke endast en god träning i fysikalisk problemlösning utan dessutom en verklig insikt i de angivna kunskapsområdenas grunder. Lösningarna äro synnerligen instruktiva och uttömmande och visa ofta vägen till en gemensam behandling av en hel grupp närbesläktade problem. Sålunda klarläggas de grundläggande principerna hos den elektriska motorn och generatorn, fluxmetern, galvanometern och stötgalvanometern genom en utförlig analys av de elektriska, magnetiska och mekaniska egenskaperna hos en ledare, som glider utmed tvenne parallella skenor under inverkan av ett magnetfält.

Inalles 84 problem ha behandlats, men varje enskilt problem är i regel försett med så många underavdelningar att det totala antalet uppgifter överstiger 200. Några få av de inledande exemplen kunna möjligen inordnas i vår studentkurs men svårigheterna öka så snabbt att det avgjort största antalet uppgifter kan anses ligga inom nuvarande fordringar för magister- och licentiatexamen.

B. Grundström.

E. Bauer, *La mesure des grandeurs; dimensions et unités.* Hermann & Cie, Paris 1939, 41 s.

Den som är intresserad av fysikens, särskilt mekanikens, grundläggande mätningar, möter i denna skrift en del intressanta synpunkter, särskilt som de ta hänsyn till de atomfysikaliska storleksordningarna av längd och tid. Den ägnar sig mera åt grundläggande definitionsfrågor än åt själva enhetssystemen, vilka behandlas mera traditionellt och därför mindre fruktbart än i andra i denna tidskrift tidigare refererade arbeten. *Erik Ingelstam.*

G.-A. Boutry, *Optique Instrumentale.* Masson et Cie, Paris 1946. 539 s., 1100 fr.

Ovanstående arbete kan ses som en frukt av den forskning, som nu i 25 år utförts i Institut d'Optique i Paris, och betecknas av professor de Gramont som ett betydande hjälpmedel till deras tjänst, som ägna sig åt den optiska instrumentkonstruktionen.

Författaren följer visserligen en logisk och matematiskt stringent linje i sin framställning av den geometriska och delar av den fysikaliska optiken men lämnar därför aldrig ur sikte bokens praktiska mål att behandla de optiska instrumenten. Därför förklarar han gärna ett svårfattligt sammanhang och undviker matematiska analyser, som endast skulle ha andrahandsintresse. En del goda figurer av översiktstyp böra särskilt nämnas. Arbetet innehåller fem avdelningar: Grundläggande lagar, Centrerade system, System med ett symmetriplan, Synen och bildframställningen i instrumentaloptiken och till sist en avdelning benämnd Monografier. De olika instrumenten och deras detaljer beröras först i sitt teoretiska sammanhang i tidigare avdelningar men äro i slutpartiet systematiskt samlade: lupp, okular, mikroskop, kikare, fotoinstrument samt spektroskop, spektrografer och monokromatorer. På en detalj, där anmälaren är aktuellt intresserad, spektroskopi inom infrarött, visade sig framställningen vara synnerligen aktuell. Boken, som har den utförliga lärobokens mål och klara uppläggning, hänvisar även till större arbeten, låt vara huvudsakligen till franska sådana. *Erik Ingelstam.*

Owe Berg, *European Instruments.* Ingenjörsvetenskapsakademien, Stockholm 1947, 38 s., kr. 6:—.

I en skrift, som omfattar 27 stencilerade sidor och 11 bildsidor i rotaprint, meddelar förf. ett koncentrat av sina intryck från en studieresa under hösten 1946 till universitets- och industrilaboratorier i Danmark, Holland, Belgien, Frankrike, Schweiz och

Tjeckoslovakiet. Arbetet utgör ett komplement till en tidigare utgiven beskrivning av engelska och amerikanska mätinstrument, recenserad i Elementas marsh. 1947. Den europeiska instrumentindustrien befinner sig för närvarande i ett stadium av rask utveckling. Det gäller nu att åter bygga upp det som blivit förstört eller bortfört under kriget samt att försöka ersätta den numera i stort sett obefintliga tyska produktionen.

Kortfattade beskrivningar lämnas av vissa instrumenttyper såsom materialprovningsapparatur, kontrollerande och registrerande instrument för mätning av tryck och temperatur, mängdmätare för strömmande vätskor och gaser, optiska instrument — speciellt mikroskop och spektrografer, oscillografer — med en tabellarisk sammanfattning av de olika firmornas typer —, elektronmikroskop samt diverse andra specialinstrument för modern laboratorieutrustning. Arbetet avslutas med en skildring av arbetsförhållandena på några kontinentala laboratorier. *B. Grundström.*

Ernest Agar Beet, *Elementary Astronomy.* Cambridge University Press, 1946. Pp. 110, 8 s. 6 d.

Boken är avsedd att användas i engelska skolor, där enligt författarens förord ämnet astronomi »ofta rekommenderas till studium, men sällan läses». Innehållet motsvarar ungefär astronomikursen vid våra svenska läroverk, men uppställningen är sådan, att man snarare får intryck av en populär astronomibok än en lärobok. De sista tio sidorna upptagas av frågor, vilka skola tvinga lärjungarna att läsa den populärt hållna texten med eftertanke. Förutom talrika textfigurer finnes 22 vackra planscher. *A. Jenvall.*

Iwan Bolin—Bror Gustaver, *Att laborera hemma. Del I.* Stockholm 1946, 80 s., kr. 3:75.

Det lilla häftet, som utgör nr 15 i en serie utgiven av »Teknik för alla», beskriver experiment inom den oorganiska kemien; det kommer snarast att kompletteras med en del II, omfattande organisk och fysiologisk kemi. Författarnas mångåriga erfarenhet inom skolexperimenten visar sig i det omsorgsfulla urvalet av 150 enkla och direkta försök, ägnade att tilltala en ungdomlig publik. Här inbjudes man att utan några förkunskaper och halvt på lek omedelbart studera syre och oxider, väte och förbränning, baser, syror, salter, metaller samt utföra några enkla analyser, ungefär såsom i realskolans kurs. Ett tjugutal illustrationer förtydliga instruktionerna, och den behövliga apparaturen är den enklast tänkbara.

Några randanmärkningar: försök 32, niktet bör ej strös utan med ett långt glasrör blåsas in i lågan; f. 80, alun har 12 mol kristallvatten; f. 102 och 104, bly och koppar angripas blott långsamt av varm svavelsyra; f. 122 och 131, även karbonat ge fällning med barium; f. 141—143, ferrirodanid är ej fällning; f. 119, vulkaniserat gummi. Tryckfel: f. 44 merceriserad; f. 94 och 95 fluor; f. 108 tennklorur; f. 150 magnecyl.

Häftet är lämpligt som anspråkslös premiebok till mycket unga kemister, som drömma om att bli vetenskapsmän eller ingenjörer, men priset synes vara alltför högt. *E. Nordefeldt.*

Madame Joliot-Curie, *Les Radioéléments Naturels.* Propriétés chimiques, préparation, dosage. Hermann & Cie, Paris 1946, 191 s., 1 tablå, 375 fr.

I anslutning till den historik över radioaktivitet och kärnreaktioner, varmed boken börjar, angiver förf. att manuskriptet förelegat färdigt innan ännu något var känt om de märkliga resultat som vunnits på området under kriget, och dessa ha därför ej medtagits.

Efter några allmänna kapitel om kinetiken för enkla och sammansatta sönderfall, om de olika strålningsarterna och deras mätning samt om radioaktiva mineral behandlas de olika medlemmarna av de radioaktiva familjerna. Strålningsfysikaliska och kemiska egenskaper samt preparativa metoder beskrivas. Möjligen kan man diskutera lämpligheten av förf:s val att i stället för att giva direkta referenser sammanföra litteraturmaterialet till en (systematiserad) bibliografi i bokens slut.

Många av medlemmarna i de radioaktiva serierna finnas antingen själva i större mängder i naturen eller äro isotoper till rikligt förekommande, mer eller mindre stabila ämnen, vilkas kemi sedan långt tillbaka är väl känd. Man bör emellertid akta sig att härur draga bestämda slutsatser beträffande deras kemiska uppträdande, ty ett i ovägbara »radiokemiska» mängder förekommande ämne kan ofta på grund av t. ex. adsorption uppföra sig helt annorlunda än då samma ämne föreligger i mg-skala. Ett enkelt exempel: Vid fällning med ammoniak förblir torium i lösning om överskott av ammoniumkarbonat är närvarande (på grund av komplexbildning). I samma medium kan däremot Th-isotopen UX_1 uppfångas på $Fe(OH)_3$-fällning under förutsättning att inga vägbara Th-mängder finnas tillstädes. Omvandlas järnhydroxiden till sulfid genom tillsats av $(NH_4)_2S$, går emellertid UX_1 i lösning.

I bokens senare hälft finnas ett par kapitel om radiokemiska metoder i allmänhet och deras användning, vari även exempel med

konstgjorda radioaktiva isotoper av lättare ämnen förekomma. Joniserande, kalorimetriska, fotografiska, biologiska m. fl. verkningar av de olika strålningsarterna beröras i ett annat kapitel.

Bestämningsmetoder för radioaktiva ämnen beskrivas i ett omfattande kapitel. Bl. a. har en förut använd, mycket besvärlig metod för aktinium ersatts med en snabbmetod, som grundar sig på bestämning av aktiviteten hos det nyuppptäckta AcK (isotop av det hittills okända grundämnet 87).

Ett kapitel handlar om teknik och försiktighetsmått vid radioaktivt arbete.

Utöver vad som angives i bokens titel finnes också ett kapitel om konstgjorda radioaktiva isotoper, bl. a. sådana av i naturen felande element. Av transuranerna har av ovan angivna skäl endast neptunium kommit med.

Det intresse de tyngsta grundämnena nu tilldragit sig gör boken värdefull som översikt över de kemiska och radioaktiva egenskaperna hos de i naturen förekommande isotoperna av dessa.

Som bilaga medföljer en tablå över samtliga grundämnens naturliga och konstgjorda isotoper (offentligt kända jan. 1946) och i förekommande fall deras halveringstider. Särskilda beteckningar angiva strålningsart och förekomst i naturen. *Lars Melander.*

P. Chouard, J. Dufrenoy, A. Eichhorn, L. Emberger, R. Gautheret, G. Mangenot, H. J. Maresquelle, H. Prat, *Les ideés modernes sur le mécanisme de la photosynthèse.* — Actualités scientifiques et industrielles, Nr. 894, Paris 1941. 62 sid., 50 fr.

Till de äldre — och intressantaste — växtfysiologiska problemen hör utan tvivel växternas fotosyntes, dvs. den process varvid växterna syntetisera kolhydrat med solljuset som energikälla. Omfattande forskningar ha under de senaste decennierna försökt bringa klarhet i de invecklade kemiska förloppen i samband med fotosyntesen. Föreliggande arbete ger en kort översikt över hithörande frågor.

Inledningsvis diskuteras skillnaden mellan fotosyntes och kemosyntes, vilken senare process är karakteristisk för vissa bakterier, t. ex. nitrifikations-, svavel- och järnbakterier, medan fotosyntesen förekommer, förutom hos alla högre, gröna växter, även hos vissa färgade bakterier. I ett annat kapitel redogöres för hur man på olika vägar lyckats visa, att den fotosyntetiska processen består av en fotokemisk fas och en fas, som är oberoende av ljuset (den s. k. Blackman-reaktionen). I andra avsnitt av boken behandlas fotosyntesen ur kvantteoretisk synpunkt. Därvid omnämnes såväl Warburgs undersökningar från 1920-talet, varvid han fann att 4 energi-

kvanta åtgå för att reducera en molekyl CO_2, liksom de moderna amerikanska forskningar, som givit helt andra resultat.

Under årens lopp ha olika teorier uppställts i syfte att klarlägga det sannolika förloppet av den rad kemiska reaktioner, varav fotosyntesen består, liksom den roll klorofyllet därvid spelar. Dessa intressanta problem ävensom en del biologiska synpunkter på fotosyntesen diskuteras i arbetets senare kapitel. Sist finner man en utförlig förteckning över litteratur, som behandlar hithörande frågor. *Tore Levring.*

H. T. Openshaw, *A Laboratory Manual of Qualitative Organic Analysis.* Cambridge University Press 1946. Pp. 95, 6 s. net.

Enligt förordet är denna handledning ursprungligen sammanställd för studerande vid Manchesters universitet och har i maskinskriven form använts där under flera år.

Inom det ringa omfånget kan det naturligtvis inte rymmas en fullständig redogörelse för analys av organiska föreningar, utan författaren har tagit som sin uppgift att visa, hur man kan identifiera ett relativt stort antal vanliga organiska föreningar.

Efter en kortfattad anvisning hur man i en föreliggande organisk substans bestämmer ingående grundämnen och karakteristiska grupper kommer bokens väsentliga del, där det redogöres för, hur man genom en rad vanliga reaktioner, såsom nitrering, oxidation, acetylering o. s. v., söker framställa några kända, helst välkristalliserande derivat av substansen. Dessa så erhållna derivat identifieras sedan genom bestämning av deras smält- eller kokpunkter, och för den skull innehåller boken ett stort antal tabeller, upptagande dessa data.

För bestämning av substanser, som ej upptagas i denna framställning, lämnar författaren anvisning på en del utförligare handledningar.

God nytta av denna bok kan man ha, särskilt vid tekniska gymnasier och liknande läroanstalter. *Rudolf Junell.*

A. E. Bell, *Modern Practical Chemistry.* Arnold, London 1946, 224 sid.

Bells arbete är samtidigt lärobok och handbok. Det innehåller en kurs i kemi, till omfånget närmast lika med de högre tekniska läroverkens här. Förf:s avsikt har varit att föra in moderna teorier redan under laboratoriearbetet före universitetsstudierna. Han anser, att det är lättare att lära sig de nya idéerna »som abstraktioner» än att se deras tillämpning. Som förf. säger i företalet, är »this book complete in itself» — emellertid hänvisas ofta till Speakmans *Modern Theory of Valency* (anm. i Elementa 27, 233).

Efter en inledning med de allmänna lagarna följer en handledning i kvalitativ analys på 30 sidor. Sedan följa anvisningar till kvantitativa övningar (12 syra-bas-titreringar, 20 redoxtitreringar, 8 fällningsreaktioner och 5 viktsanalyser) samt detaljerade föreskrifter för framställning av ett tjugotal oorganiska preparat och väl dubbelt så många organiska. Urvalet är gott; en och annan uppgift är ganska krävande. Inom den allmänna kemien upptages bl. a. bestämning av molvikt, ledningsförmåga och pH (endast universalindikator användes, och behandlingen av salters »hydrolys» är alls inte modern). De tre försök, som gälla massverkningslagen äro alla mätning av reaktionshastighet! — Uttrycket för salters löslighetsprodukt härledes genom resonemang om jonerna och kristallgittret och ger nog en bättre uppfattning än det vanliga spekulerandet över konstant koncentration av molekyler, som inte existera.

Joner skrivas på det i mitt tycke bästa sättet, t. ex. Cu^{++}, Fe^{+++}, SO_4^{--}. Med [ ] betecknas såväl koncentrationer som komplexjoner, och tecknet förekommer i ännu en betydelse i formeln $H_2SO_4 \equiv \equiv H_2O + SO_2 + [O]$, som vill belysa syrans oxiderande egenskaper. Figurerna äro tydliga och trevliga; den som förvarar sin karbonatfria lut enligt anvisning skall dock tyvärr finna, att inte blott byretten utan också förrådsflaskan tömmes vid titreringen.

Bertil Englund.

A. Edw. Remick, *Electronic Interpretations of Organic Chemistry.* Wiley and Sons, New York 1945, 474 s., kr. 21: —.

Med en sympatisk och personlig stil diskuterar författaren i utförlig form en rad fysikalisk-kemiska lagar och teorier inom den organiska kemien, varvid förutsättes att läsaren redan är ganska förtrogen med fysikalisk och organisk kemi. Speciellt behandlas elektronteoriens mångfaldiga tillämpningar för förståendet av de organiska ämnenas uppbyggnad och reaktioner, reduktion och oxidation, reaktioners kinetik samt lösningsmedlets roll.

De många fakta, detaljer och synpunkter som trängas på nästan varje sida göra emellertid framställningen svåröverskådlig, varför läsaren stundom får besvärligt att finna den ledande tankegången. Men för den som vill fördjupa sig i ämnet och ej drar sig för ansträngningen är boken en guldgruva. *E. Nordefeldt.*

Recensenter i detta häfte: fil. kand. G. Blom, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; lektor B. Grundström. Djursholm; fil. lic. S. Hilding, Stockholm; docent L. Hulthén, Lund; lektor E. Ingelstam, Stockholm; adjunkt A. Jenvall, Stockholm; lektor R. Junell, Uppsala; docent T. Levring, Göteborg; fil. lic. L. Melander, Stockholm; lektor E. Nordefeldt, Stockholm; lektor O. Stenström, Västerås; docent N. Svartholm, Stockholm.

Gradualavhandlingar.[1]

Ulf Hellsten, *Determination of the Denominator of Fredholm in Some Types of Integral Equations.* Särtryck ur Acta Mathematica, vol. 79, 52 s. Disputation vid Stockholms Högskola den 22 mars 1947. Opponenter: professor Börge Jessen och fil. lic. Sven Hilding.

Betrakta en homogen integralekvation av Fredholms typ med integrationsintervallet (0, 1), då x varierar i detta intervall: $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy$. Dess kärna $K(x, y)$ är definierad i kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. I avhandlingen studeras egenvärden och egenfunktioner till sådana integralekvationer, som ha kärnan 0 på ena sidan om en viss kurva i kvadraten och 1 på andra sidan. Det visar sig sedan, att resultaten lätt kan utsträckas till kärnor av formen $K(x, y) = P_1(x)Q_1(y) + P_2(x)Q_2(y) + \ldots + P_N(x)Q_N(y)$ på andra sidan av kurvan.

Denna klass av integralekvationer kan anses som en viss generalisering av Volterras ekvation, vilken som bekant är karakteriserad av att dess kärna är 0 över diagonalen $y = x$ i kvadraten, och som saknar egenvärden. Det visar sig, att det råder enkla samband mellan kurvans form och antalet egenvärden. För sådana kurvor i kvadraten, som äro belägna helt över diagonalen $y = x$, ha motsvarande integralekvationer alltid ett ändligt antal egenvärden, om kärnan är 0 över och 1 under kurvan.

Kap. I behandlar det enkla fall, då kurvan i kvadraten är en rät linje $y = x + a$, $0 < a < 1$, parallell med diagonalen $y = x$ och belägen över densamma. Då kärnan är 1 under linjen, får integralekvationen n egenvärden, där n är bestämt av olikheten $\frac{1}{n} \leq a < \frac{1}{n-1}$. I kap. II utsträckes resultaten till kärnor, för vilka begränsningskurvan fortfarande är en rät linje men ej längre parallell med diagonalen utan endast underkastad villkoret att ligga helt över den i kvadraten. Det blir fortfarande endast ett ändligt antal egenvärden, förutsatt att linjen ej går genom punkten (0, 0) eller (1, 1). Gör den det får ekvationen oändligt många egenvärden.

Sådana fall, då kurvan är en rät linje, som skär diagonalen inuti kvadraten, behandlas i kap. III. Det blir i allmänhet oändligt många egenvärden. Med samma metod behandlas i kap. IV en

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

symmetrisk integralekvation, vars kärna är 1 i området mellan två linjer parallella med diagonalen $y = x$ och belägna å olika sidor på samma avstånd från den och 0 i resten av kvadraten.

I kap. V utsträckas resultaten från kap. I—III till kärnor, för vilka begränsningslinjen ej behöver vara rät. Dessutom visas, att de uttryck som erhållits, överensstämma med Fredholms nämnare.

Den metod, som användes i avhandlingen, bygger på en genom partiell integration av den inhomogena ekvationen

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{f(x)} \varphi(y)dy + 1$$

erhållen rekursionsformel. Den »allmänna termen» häri låter sig uppskattas för de i avhandlingen betraktade kärnorna.

Arne Broman, *On two Classes of Trigonometrical Series.* Uppsala 1947, 51 s. Disputation i Uppsala den 27 maj 1947. Opponenter: docent C. G. Esseen och fil. lic. B. Nyman.

Avhandlingen är ägnad ett relativt nytt och ännu föga bearbetat område inom de trigonometriska seriernas teori, grundat på följande potentialteoretiska förhållande. Om en graviterande massa tänkes fördelad på en cirkelperiferi, samt om den agerande kraftlagen uppfyller vissa enkla villkor, kan systemets energi uttryckas genom en kvadratsumma i potentialens fourierkoefficienter med inskjutna vikter. Detta förhållande leder i sin tur till att fundamentala konvergens- och entydighetsfrågor kunna givas en fullständig lösning inom stora klasser av trigonometriska serier.

De två klasser, som ur denna synpunkt i första hand tilldraga sig intresse, äro definierade genom villkoren

$$S_\alpha: \quad \sum_1^\infty n^\alpha (a_n^2 + b_n^2) < \infty, \qquad T_\alpha: \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}(a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

där a_n och b_n beteckna den trigonometriska seriens koefficienter, samt α är en parameter, $0 < \alpha < 1$.

Förf. studerar först konvergensproblemet och bevisar, att en serie tillhörande en klass S_α endast kan divergera på en punktmängd, vars yttre kapacitet av ordning $1 - \alpha$ är noll. Resultatet utgör den första av avhandlingens två huvudsatser.

I avhandlingens andra huvudsats löser förf. entydighetsproblemet för klasserna T_α och bevisar att en sluten punktmängd endast kan vara en s. k. entydighetsmängd inom en klass T_α i det fall att dess kapacitet av ordning $1 - \alpha$ försvinner.

Bägge dessa huvudsatser utgöra utvidgningar av resultat, som bevisats av Beurling omkring 1940 i fallet $\alpha = 1$.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1947: 1—2.

Ur innehållet: K. G. Malmquist, Intryck från en Amerikafärd; C. Schalén, Harvardobservatoriet 100 år; G. Larsson-Leander, Nya franska institutioner för astrofysik; N. V. E. Nordenmark, F. W. Bessel, ett hundraårsminne; Y. Öhman, De svenska expeditionerna för observation av solförmörkelsen den 20 maj 1947; B. Lindblad, Elis Strömgren.

Svensk kemisk tidskrift, 1947: 4—7.

Ur innehållet: B. Löfström, Den svenska kemiska industriens insatser och utveckling under andra världskriget; O. Samuelson, Dégradation comparative de la cellulose lors de la cuisson au Bisulfite, du blanchiment et du mûrissement; Y. Kauko und L. Komulainen, Kalkangreifendes Wasser; G.-M. Schwab und J. Pechlivanidis, Zur Kenntnis des »synthetischen Thalliums»; Y. Derrien and J. Bernard, Individualisation, Characterisation and Fractionation of the Serum Proteins by Salting-out.

Populär radio, 1947: 6—9.

Ur innehållet: Ett danskt radiolaboratorium; Automatiska piloten; Consol, ett system för radionavigering över långa distanser; Televisionen i England; Synkrodynen, en intressant ny mottagaretyp; Nya mätinstrument från fjorton länder.

Fysisk Tidsskrift, København 1947: 1—2.

Ur innehållet: Chr. Jensen, Foreningen af Fysik- og Kemilærere ved Gymnasier og Seminarier 1921—1946; M. Møller-Jørgensen, Apparat til Vædskestrømning, Mekanisk Modell til Audionlampen, Kondensatorers Sammensætning, Nyttevirkning ved Opvarmning med Gas; O. Rasmussen, Ensretter til højspænding; J. A. Christiansen, Om Faren ved Forsøg med Blandinger af flydende Luft og brændbare Vædsker, samt en Bemærkning om Faren at opbevare Æter i længere Tid.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, Årg. 9 (1947): 1.

Ur innehållet: Chr. Finbak, Odd Hassel 50 år; E. A. Hylleraas, Nobelpristager i fysikk: Albert Einstein; J. Holtsmark, De greske naturfilosofer; E. A. Hylleraas, En meget vakker halo; H. Margenau, Fysikkens oprinnelse og utvikling.

Naturen, Bergen, 1947: 5—8.

Ur innehållet: O. F. Harbek, Asdic; K. Fægri, Atomforskning i Norge; K. Fægri, Kunstig fremkalt nedbør; L. R. Natvig, Oppfyller våre naturhistoriske museer de krav man bør kunne stille til dem?; J. A. Dons, Glaciasjons-teoriens gjennembrud; E. Dahl, Om forhholdene under og etter den siste istid i Norge.

Science Progress, 1947: April, July.

Ur innehållet: The late-glacial period: The source of stellar energy; The association of basic »fronts» with granitisation; The toxicity and properties of the glycols; Some aspects of modern algebra; Biological methylation; Some problems of rocket propulsion; The problem of pollution of waters. Recent Advances in Science: under denna rubrik ett stort antal artiklar inom skilda områden. Notiser och bokanmälningar.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1532) *Vilken är orten för radikalcentrum (radikalaxlarnas skärningspunkt) till 3 cirklar med fixa medelpunkter och varierande, proportionella radier?* *N. J.*

1533) *Två cirklar äro givna, den ena omslutande den andra. Från en rörlig punkt A på den yttre cirkeln dragas två tangenter till den inre. Tangenterna skära den förstnämnda i B och C. Sök a) orten för tangentkordans mittpunkt samt b) orten för medelpunkten till den i triangeln ABC inskrivna cirkeln. När sammanfalla dessa bägge orter?* *L. Sandgren.*

1534) *I en regelbunden 11-hörning* $A_0A_1 \ldots A_{10}$, *inskriven i en cirkel med radien R och centrum O, placeras lika massor i* A_1, A_3, A_4, A_5, A_9. *Var ligger deras tyngdpunkt? Hur äro de fem hörnen valda?* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1535) Medianen i en triangel delar en vinkel i två delar α och β. En viss av triangelns övriga vinklar är γ. Visa, att vid lämpligt val av beteckningar $\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\beta) = \cos(\beta+\gamma)$.

1536) Från en punkt P drages tangenten PT till en cirkel med centrum O; PO råkar förlängd cirkeln i A. Om $\angle APT = 2v$, bestäm $\operatorname{tg} \angle TAP$.

Svar: $(1 - \operatorname{tg} v) : (1 + \operatorname{tg} v)$.

1537) En fyrhörning med vinkelräta diagonaler har i ordning sidorna a, b, c, d. Visa, att $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Bevisa även satsens omvändning.

1538) Lös ekvationen $\sin 5x + \sin 4x + \sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$.

Svar: $n \cdot 60°$; $\pm 72° + n \cdot 360°$; $\pm 144° + n \cdot 360°$.

1539) För vilka spetsiga eller trubbiga vinklar gäller olikheten $2\cos x < \cos 2x < \cos x$?

Svar: $111{,}47° < x < 120°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1535 är insänd av *G. Kinell*, 1536, 1543 av *A. L.*, 1537—1542 av *B. Svenonius*, 1544 av *Cege*.

1540) De genom punkterna A och B på kurvan $y = x^3 - ax$ dragna normalerna äro parallella med kurvans tangent i origo. Bestäm a så, att linjen AB får ekvationen $3y = x$.

Svar: $a = 0{,}5$.

1541) Visa, att kurvan $60y = 25x^3 - 3x^5$ har två parallella dubbeltangenter med vinkelkoefficienten 25 : 36.

1542) Från en punkt kan som bekant högst tre normaler dragas till en parabel. Sök orten för de punkter, för vilka åtminstone två av normalerna till parabeln $y^2 = 2px$ sammanfalla.

Svar: $8(x - p)^3 = 27py^2$.

1543) Från ena ändpunkten av en korda i en cirkel fälles normalen mot tangenten i den andra. Sök maximum för ytan av den erhållna triangeln. Radien $= r$.

Svar: $\frac{3r^2\sqrt{3}}{8}$.

1544) Genom två av skärningspunkterna mellan en parabel och en cirkel som går genom fokus dragas tangenterna till parabeln. Visa, att den omskrivna cirkelns centrum i den av tangenterna och tangentkordan bildade triangeln ligger på den givna cirkeln.

Lösn. till uppg. 1500—1502.

1500) *Om* $(x_0; y_0; z_0)$ *är en lösning till systemet* $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, $\sin x + \sin y + \sin z = 0$, *så äro* $(x_0 + y_0; y_0 + z_0; z_0 + x_0)$ *och* $(2x_0; 2y_0; 2z_0)$ *även lösningar. Visa detta utan att lösa systemet.*

X.

Om $\cos x_0 + \cos y_0 + \cos z_0 = 0$ (I) och $\sin x_0 + \sin y_0 + \sin z_0 = 0$ (II), så följer ur $\cos\alpha$(I) $- \sin\alpha$(II) $= 0$, att $\Sigma \cos(x_0 + \alpha) = 0$ (1) och ur $\sin\alpha$(I) $+ \cos\alpha$(II) $= 0$, att $\Sigma \sin(x_0 + \alpha) = 0$ (1'). Väljes $\alpha = -(x_0 + y_0 + z_0)$, erhålles $\Sigma \cos(x_0 + y_0) = 0$ (2) och $\Sigma \sin(x_0 + y_0) = 0$ (2'). Välj $\alpha = x_0$, y_0, z_0 i ordning i (1) och addera, så blir $\Sigma \cos 2x_0 + 2\Sigma \cos(x_0 + y_0) = 0$, dvs. $\Sigma \cos 2x_0 = 0$ enl. (2). På samma sätt leda (1') och (2') till $\Sigma \sin 2x_0 = 0$.

Tillägg: Om $a + b + c = 0$ dvs. $a + b = -c$, är $(a + b)^3 = -c^3$ eller $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$ eller $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ (3). Med $a = \cos x_0$ osv. fås ur (I) och (3) $\Sigma \cos^3 x_0 = 3 \cos x_0 \cos y_0 \cos z_0$ (4). P. s. s. fås $\Sigma \sin^3 x_0 = 3 \sin x_0 \sin y_0 \sin z_0$ (4') ur (II) och (3). Enl. kända formler sluter man sedan till $\Sigma \cos 3x_0 = 12 \cos x_0 \cos y_0 \cos z_0$ (5) och $\Sigma \sin 3x_0 = -12 \sin x_0 \sin y_0 \sin z_0$ (5'). Om slutligen $a = \cos x_0 + i \sin x_0$ osv., får man ur (I), (II) och (3) enl. de Moivres teorem $\Sigma \cos 3x_0 = 3 \cos(x_0 + y_0 + z_0)$ (6) och $\Sigma \sin 3x_0 = 3 \sin(x_0 + y_0 + z_0)$ (6'). Jämförelse mellan (5) och (6) resulterar i

$\cos(x_0 + y_0 + z_0) = 4 \cos x_0 \cos y_0 \cos z_0$, mellan (5') och (6') i $\sin(x_0 + y_0 + z_0) = -4 \sin x_0 \sin y_0 \sin z_0$. Ur (6) och (6') fås efter kvadrering och addition lösningen $3x_0 \equiv 3y_0 \equiv 3z_0 \equiv x_0 + y_0 + z_0 \pmod{2\pi}$. *X.*

Även löst av *A. Pleijel* och *N. O. Sjöstrand.*

1501) *Om p är ett primtal och m ett godtyckligt, positivt helt tal, hur många faktorer p finnes det då i* $\underline{/p^m}$ *?*

Per Olof Fröman.

I det följande betyder p ett primtal, övriga bokstäver pos. hela tal, där så är möjligt, även 0. Den klassiska uppgiften att bestämma $N(A) =$ antalet p-faktorer i $A! = 1.2.3. \ldots A$ (där $A \geqq p$) löses ungefär så: Om man vid vanlig division får $A = pA_1 + r$, där $r < p$, är tydligt, att det innehålles lika många p-faktorer i $p.2p.3p. \ldots A_1 p = p^{A_1} . A_1!$ som i $A!$, så att $N(A) = A_1 + N(A_1)$ (1). A_1 brukar betecknas $E(A : p)$ eller $[A : p]$ och är det största hela tal, som icke överstiger $A : p$. Denna symbol har den lätt insedda egenskapen $[[A : m] : n] = [A : mn]$. Med användning härav får man genom upprepad tillämpning av (1): $N(A) = [A : p] + [A : p^2] + [A : p^3] + \ldots$, en serie, som automatiskt brytes, när $A : p^r$ understiger 1. I föreliggande specialfall är $N(p^m) = p^{m-1} + \ldots + 1 = (p^m - 1) : (p - 1)$. Uppg. 40 (årg. 3 s. 62) är ett annat specialfall. *X.*

Även löst av *N. O. Sjöstrand, E. Smn* och *Cs.*

1502) *Om en rymdpolygon beskrives i given riktning, bildar planet genom dess i:te sida och en fix punkt vinklarna* u_i *och* v_i *med planet genom sidan och föregående resp. påföljande hörn. Storheterna* u_i *och* v_i *ha samma eller skilda tecken, allteftersom föregående och påföljande hörn ligga på samma sida eller olika sidor om planet genom polygonsidan och den fixa punkten. Sök relationen mellan dessa vinklar.* *N. J.*

De normaler, som från den fixa punkten P fällas mot planet genom 1:a och 2:a sidan, kallas k_{12} osv.; normalen från P mot 1:a sidan kallas h_1 osv. Då är $\sin u_1 = \frac{k_{1n}}{h_1}$, $\sin v_1 = \frac{k_{12}}{h_1}$, $\sin u_2 = \frac{k_{12}}{h_2}$, $\sin v_2 = \frac{k_{23}}{k_2} \ldots$, $\sin u_n = \frac{k_{n-1} k_n}{h_n} \sin v_n = \frac{k_{1n}}{h_n}$, varav $\Pi \sin u_i = \Pi \sin v_i$, om föregående och påföljande hörn ligga på samma sida om planet genom sidan och den fixa punkten. Det antal gånger de ligga på olika sidor måste vara jämnt, varför samma resultat erhålles i det allmänna fallet. *S. B.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1947.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x^2 - x - y^2 + y = 0, \\ 5x - 3y - 2xy = 0. \end{cases}$
2. Från hörnet A i triangeln ABC drages en rät linje till en punkt D på sidan BC eller på dess förlängning. Bevisa, att i båda fallen gäller sambandet
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin BAD}{\sin DAC}.$$
3. Summan av en konvergent oändlig geometrisk serie förhåller sig till summan av termerna med ordningsnumren 3, 5, 7, ... som 4 : 9. Summan av den ursprungliga seriens båda första termer är $\frac{1}{9}$. Vilken är serien?
4. På sträckan AB, vars längd är 10 cm, befinner sig en rörlig punkt C. Med AC och CB som baser uppritas två trianglar. I den förra är höjden hälften så stor som basen, medan i den senare höjden är dubbelt så stor som basen. Uttryck dessa trianglars sammanlagda yta ($= y$ cm^2) som funktion av AC ($= x$ cm). Åskådliggör funktionen, då C rör sig från A till B, i ett diagram, varvid 1 cm på y-axeln lämpligen kan motsvara 10 enheter och på x-axeln 1 enhet. Bestäm även C:s läge, då värdet av funktionen är så litet som möjligt.
5. Triangeln ABC med sidorna $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm och $BC = 21$ cm är inskriven i en cirkel. Diametern AD drages, och punkten D sammanbindes med B och C. Beräkna sidor och vinklar i triangeln BCD.
6. I en likbent triangel ABC med spetsen A är bissektrisen BD till vinkeln B dragen. Triangeln BCD är likbent. Beräkna, hur stor del triangeln BCD utgör av triangeln ABC.
7. En halvcirkel med radien 8 cm är inskriven i ett parallelltrapets, så att dess diameter ligger utefter den längre av de parallella sidorna och dess båge tangerar de tre övriga sidorna. Den längre av de parallella sidorna är 27 cm, och av de icke parallella sidorna är den ena 7 cm längre än den andra. Beräkna trapetsets yta.

8. Två lika stora cirklar med radien 12 cm gå genom varandras medelpunkter. I det för cirklarna gemensamma området uppritas två cirklar, som tangera varandra utantill och de givna cirklarna innantill och vilkas radier förhålla sig som 1 : 2. Beräkna dessa radiers storlek.

Resultat: 1. $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = 1$; $x_3 = \frac{-3+\sqrt{15}}{2}$, $y_3 = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$; $x_4 = \frac{-3-\sqrt{15}}{2}$, $y_4 = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$. 3. $\frac{4}{9}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... 4. $4y = 5x^2 - 80x + 400$; $y_{\min} = 20$ för $x = 8$. 5. $BD = 18{,}75$ cm; $CD = 12{,}75$ cm. Vinklarna B, C, D äro resp. 36,88°; 61,92°; 81,20°. 6. $(3 - \sqrt{5}) : 2$. 7. 132 cm². 8. $2\frac{7}{8}$ cm och $5\frac{3}{4}$ cm.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. Upprita kurvan $10y = x^4 - 8x^2 + 7$. Ange särskilt kurvans skärningspunkter med koordinataxlarna samt dess maximi- och minimipunkter.
2. I var och en av två oändliga geometriska serier med reella termer är första termen 3. Seriernas kvoter äro varandras inverterade värden. Den ena serien är konvergent och den andra följaktligen divergent. Summan av de 7 första termerna i den ena serien är 64 gånger så stor som summan av de 7 första termerna i den andra. Bestäm summan av den oändliga konvergenta serien.
3. Ett parallelltrapets $ABCD$, vars parallella sidor AB och CD förhålla sig som 1 : 2, har hörnet A i punkten (— 3; 6) och hörnet D på x-axeln. Diagonalerna AC och BD skära varandra under räta vinklar i punkten (— 1; 2). Bestäm sidornas ekvationer.
4. I en rätvinklig triangel med ytan T uppritas den inskrivna cirkeln. Förenas tangeringspunkterna med varandra, erhålles en triangel med ytan t. Bevisa, att förhållandet $t : T$ är lika med förhållandet mellan den inskrivna cirkelns radie och hypotenusan.
5. I ett likbent parallelltrapets är den ena av de parallella sidorna 16 cm, och summan av halva den andra och höjden är 9 cm. Trapetset roterar kring de parallella sidornas mittpunktsnormal. När blir den uppkomna rotationskroppens volym så stor som möjligt?
6. Lös ekvationen $\sin 2x = 2 + 2\sin x + 2\cos x$.

7. En cirkelsektor har radien r och medelpunktsvinkeln v ($v < 180°$). Sektorns båge AB delas genom punkterna C och D i tre lika stora delar, AC, CD och DB. Ett parallelltrapets $CDEF$ inskrives i sektorn, så att E och F äro belägna på radierna OB respektive OA och CD är parallell med EF. Ange läget av E och F, då trapetsets yta är så stor som möjligt. Undersök därefter, mellan vilka värden vinkeln v skall ligga, för att OE skall vara $> \frac{1}{2}r$, då ytan har sitt maximivärde.

8. I en kub äro $ABCD$ och $A'B'C'D'$ två parallella sidoytor, vilkas hörn förenas av kantlinjerna AA', BB', CC' och DD'. Ett plan lägges genom hörnet C' och mittpunkterna på kantlinjerna AB och AD. Bestäm ytan av den del av planet, som faller inom kuben.

Resultat: **1.** Kurvan skär axlarna i $(\pm 1;\ 0)$, $(\pm \sqrt{7};\ 0)$ och $(0;\ 0{,}7)$; $y_{max} = 0{,}7$ för $x = 0$; $y_{min} = -0{,}9$ för $x = \pm 2$. **2.** 6 eller 2. **3.** $AB : 3x + 4y - 15 = 0$; $AD : 3x - y + 15 = 0$; $CD : 3x + 4y + 15 = 0$; $BC : 9x + 2y - 15 = 0$. **4.** I *varje* triangel är $t = \frac{r^2}{2} \sum \sin A = \frac{r^2}{R2} \sum R \sin A = \frac{r^2}{2R} \cdot p = \frac{r}{2R} \cdot T$. **5.** Max.volym $= 196\pi$ cm^3, då höjden $= 7$ cm. **6.** $180° + n \cdot 360°$; $270° + n \cdot 360°$. En rationell symmetrisk funktion av $\sin x$ och $\cos x$ överföres genom substitutionen $x = y + 45°$ i en rationell funktion av $\cos y$. Man får $2\cos^2 y - 2\sqrt{2}\cos y - 3 = 0$. **7.** Om $OE = OF = x$, är trapetsets yta $= \frac{r^2}{2} \cdot \sin\frac{v}{3} + rx \sin\frac{v}{3} - \frac{x^2}{2}\sin v$. Max. fås för $x_1 = r \sin\frac{v}{3} : \sin v = r : \left(3 - 4\sin^2\frac{v}{3}\right)$. Om E och F skola ligga *på* resp. radier och ej på deras förlängningar, måste $x_1 \leq r$, vilket innebär $\sin\frac{v}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs. $v \leq 135°$. För $135° \leq v < 180°$ är trapetset $ABCD$ största inskrivna trapets (gränsmax.). Villkoret $x_1 > \frac{r}{2}$ ger $\sin\frac{v}{3} > \frac{1}{2}$, dvs. $v > 90°$. **8.** Om kubens kant är a, blir ytan $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$ ytenh.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Två sidor i en liksidig triangel tangera hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. En höjd i triangeln ligger utefter y-axeln, och en sida går genom punkten $(b;\ 0)$. Bestäm hyperbelns excentricitet.

2. Bestäm maximi- och minimivärdena för funktionen

$$y = \cos(x + v)\cos(3v - x),$$

där v är en konstant.

3. Kurvorna $y = x^3 - 3x$ och $y = x^2 + 2x + a$, där a är en konstant, tangera varandra. Bestäm a och koordinaterna för kurvornas gemensamma punkter.

4. En triangel har två hörn i punkterna (10; 0) och (0; 5) och det tredje på ellipsen $x^2 + 3y^2 = 21$. Bestäm det minsta värde, som triangelns yta kan anta.

5. En korda i kurvan $y = ax - x^3$, där $a > 0$, har sin ena ändpunkt i origo. Undersök, hur kordans längd varierar, då kordan vrider sig kring origo, och ange särskilt, för vilka värden på a längden har något maximivärde.

6. P och Q äro två punkter på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, där $a > b$. Kordan PQ går genom ellipsens högra brännpunkt. En parallellogram har två motstående hörn i P och Q, och dess tredje hörn ligger i ellipsens vänstra brännpunkt. Sök orten för parallellogrammens fjärde hörn, när P och Q beskriva ellipsen.

7. P är en punkt på parabeln $x^2 + 2y - 1 = 0$. Tangenten i P skär koordinataxlarna i A och B. Undersök, hur längden av sträckan AB varierar, då P genomlöper parabeln, och åskådliggör detta grafiskt. Ange särskilt läget för P, då AB har sitt minsta värde.

Resultat: **1.** $\sqrt{7} : 2$. **2.** $y_{\max} = \cos^2 2v$ för $x = v + n \cdot \pi$; $y_{\min} = -\sin^2 2v$ för $x = v + \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$. **3.** För $a = 3$ tangering i $(-1; 2)$ och skärning i $(3; 18)$; för $a = -\frac{175}{27}$ tangering i $\left(\frac{5}{3}; -\frac{10}{27}\right)$ och skärning i $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{154}{27}\right)$. **4.** 7,5 ytenh. **5.** Med vinkelkoeff. k för kordan OP som variabel är $\overline{OP}^2 = z = (a - k)(1 + k^2)$; $z' = 0$ för $k = (a \pm \sqrt{a^2 - 3}) : 3$. P beskriver kurvans ena hälft, när k växer från $-\infty$ till a (= inflexionstangentens vinkelkoeff.). Om $0 < a \leqq \sqrt{3}$, är $z' \leqq 0$ och OP avtar monotont från $+\infty$ till 0. Är $a > \sqrt{3}$, avtar OP från $+\infty$ till ett min. för det mindre k-värdet, växer sedan till ett max. för det större och avtar slutligen till 0. **6.** Orten är ellipsen $b^2(x - 2c)^2 + a^2y^2 = b^2c^2$. Kan erhållas geometriskt genom »övergång till cirkel». Vid denna är orten för parallellogrammens mittpunkt en cirkel över OF som diameter. Orten för hörnpunkten erhålles genom förstoring i skalan 1 : 2 (se Elementa uppg. 211, årg. 10, s. 126). **7.** Med P:s x-koord. som variabel är

$\overline{AB}^2 = (x^2+1)^3 : 4x^2$. Då x växer från 0, avtar AB från $+\infty$ till min. $= 3\sqrt{3} : 4$ för $x = 1 : \sqrt{2}$ och växer därpå till $+\infty$ för $x = +\infty$. Symmetrisk variation, då x avtar från 0 till $-\infty$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Uppställda ekvationer böra motiveras, enheterna angivas och beteckningarna förklaras. Lösningarna till uppgifterna 2, 3 och 5—7 böra åtföljas av enkla figurer. — Konstanter, som ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En personhiss uppbäres av ett par stållinor, som gå över ett drivhjul och i andra ändan äro fastgjorda vid en motvikt. Hissen lyftes av en likströmsmotor, som över en utväxling påverkar drivhjulet. Hisskorgen väger 240 kg och får besättas med 4 personer, varvid man räknar med en vikt av 80 kg per person. Motvikten väger 400 kg. Angiv den elektriska effekt i kW, som måste tillföras motorn, när hissen har ovannämnda belastning och stiger med en konstant hastighet av 0,6 m/sek. Motorns verkningsgrad är 75 %, utväxlingens 40 %.
2. En rektangulär tavla hänger på en vägg med långsidorna horisontella. Formatet är 48×40 cm, ramen inräknad. Snöret, som är 60 cm långt, ligger över en krok på väggen. Dess ändpunkter äro fastknutna vid skruvöglor, som äro anbragta en vid vardera kortsidan av tavlan på ett avstånd av 18 cm från ramens nedre kant. Då ramen är tämligen hög, ligger tyngdpunkten något framom tavlan, närmare bestämt på normalen genom tavlans mittpunkt på ett avstånd av 2,0 cm från ramens bakre plan. Hur stor vinkel bildar tavlan med väggen? Avståndet mellan snörets fästpunkter kan sättas lika med ramens längd. Snörets mittpunkt tänkes ligga i väggens plan, fästpunkterna i ramens bakre plan. Friktionen lämnas ur räkningen.
3. En kropp kastas med en viss starthastighet uppåt längs ett lutande plan, som bildar vinkeln α med horisontalplanet. Hur långt kroppen kommer att gå uppför planet, beror av friktionens storlek. Vore planet glatt, skulle kroppen vända efter att ha tillryggalagt en viss sträcka s_0 cm. Är friktionskoefficenten μ, når den upp till en punkt på avståndet s cm från startpunkten. Bestäm s som funktion av s_0, α och μ och åskådliggör funktionen grafiskt, om $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ och μ varierar mellan 0 och $\frac{1}{2}$.
4. Följande försök visar, huru ett ämnes smältvärme kan bestämmas med en relativt liten mängd av ämnet. En liten tunnväggig kopparbägare, vägande 2,61 g, innehöll 16,8 g fint blyhagel. Den var omlindad med en hårfin isolerad konstantantråd. En

konstant elektrisk ström leddes genom konstantantråden. Temperaturen i bägaren steg då 0,52° per minut. Försöket upprepades, sedan 0,054 g stearinsyra blandets med haglen. Strömstyrkan var oförändrad, men temperaturstegringen per minut blev nu något mindre och avstannade efter en stund, varefter temperaturen höll sig konstant under 6,25 minuter. Beräkna stearinsyrans smältvärme. Specifika värmet för koppar och bly är 0,095 resp. 0,032 cal per g och grad. Värmeförlusterna till omgivningen och till det termoelement, som användes för temperaturmätningen, lämnas ur räkningen.

5. Om en galvanometer vet man, att en vridning hos galvanometerspegeln av 1° svarar mot strömstyrkan 167 mikroampère. Den begagnades vid ett tillfälle för avläsning med kikare och skala. Den i mm graderade skalan var anbragt i horisontellt läge omedelbart ovanför kikarobjektivet i ett mot kikarens axel vinkelrätt plan. Avståndet från spegeln till skalan var 2,63 m. Då galvanometern var strömlös, sammanföll hårkorset med bilden av delstrecket 251,0 på skalan, vilket befann sig rakt ovanför objektivets mitt. Huru stark ström gick genom galvanometern, när hårkorsets läge på skalans bild avlästes till 28,7? Vridningsvinkeln är proportionell mot strömstyrkan. 1 mikroampère = $= 10^{-6}$ A.

6. För att visa det vita ljusets uppdelning i färger och de färgade strålarnas återförening till vitt ljus använder man ett prismaspektroskop, vars kikare borttagits. Med hjälp av kollimatorn framställes ett parallellt knippe vitt ljus. Vid brytningen i prismat uppdelas ljuset, och en gulgrön ljussort passerar prismat under minimideviation. Omedelbart på andra sidan om prismat har man uppställt en bländare, som bortskär knippets kantstrålar. Dess öppning är cirkulär och vinkelrät mot de gulgröna strålarna. De strålar, som passera genom bländaren, uppfångas av en tunn akromatisk lins, som står på 22 cm avstånd från bländaren. De alstra ett kort spektrum i linsens fokalplan och förenas åter på en skärm, 220 cm från linsen, där de bilda en skarp vit cirkulär fläck, en optisk bild av bländaren. På det ställe, där spektrum bildats, inskjutes ett hjälpprisma av glas med brytande vinkeln 4,0° på sådant sätt, att alla röda strålar, men inga andra, gå genom prismat. Härigenom får man på skärmen två cirkulära fläckar, av vilka den ena är röd och den andra färgad i den röda fläckens komplementfärg; där fläckarna täcka varandra, är den gemensamma ytan vit. Hur stort är avståndet mellan de båda bländarbildernas medelpunkter? De röda strålarna kunna anses passera

hjälpprismat under minimideviation. Glasets brytningsindex för rött är 1,50. I figuren behöver man endast återgiva tre strålar, en röd, en gulgrön och en violett, som gå genom bländarens centrum; den gulgröna sammanfaller med linsens huvudaxel.

7. En gnistinduktor, hos vilken primärströmmen slöts och bröts med en elektromagnetisk hammare, skulle drivas med ström från ett likströmsnät med 120 V spänning. Två motstånd, B och C, anslötos därför i serie med varandra till nätet, varpå gnistinduktorn kopplades parallellt med motståndet B. När primärströmmen slutes, når strömstyrkan i primärledningen snabbt ett konstant värde; man önskade, att detta skulle vara 4,0 A. När primärströmmen brytes, antager spänningen mellan ändpunkterna av motståndet B likaledes snabbt ett konstant värde; man önskade, att detta skulle vara 8,0 V. Likströmsmotståndet i primärspolen var 1,3 Ω. Hur stora borde motstånden B och C vara?

8. Vid en undersökning av värmetransporten genom ett visst värmeisolerande material begagnade man två vida metallrör av 20,0 cm längd. Det ena hade den yttre diametern 19,5 cm, det andra var någon cm vidare. Det trängre röret befann sig inuti det vidare; axlarna sammanföllo, och rörens ändytor voro tillslutna med gemensamma värmeisolerande täckplattor. Det material, som skulle undersökas, utfyllde mellanrummet mellan rören. Det inre röret var fyllt med toluol och innehöll därjämte en upphettningsspiral, vars motstånd var 12,5 Ω, och en omrörare. Det yttre rörets temperatur hölls vid 0° C. Temperaturdifferensen mellan rören mättes med ett termoelement, vars elektromotoriska kraft var 37,5 mikrovolt/grad. Man fann, att det behövdes en upphettningsström av 0,90 A för att upprätthålla en så stor temperaturdifferens mellan rören, att termoelementets elektromotoriska kraft blev 200 mikrovolt. Genom särskilda försök hade man funnit, att 20 % av den tillförda energien bortgick genom täckplattorna. Huru mycket värme skulle per sek transporteras genom varje cm^2 av innerrörets yttre mantelyta, om temperaturdifferensen mellan rören vore 1° C? Värmetransporten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan rören.

Resultat: **1.** 3,1 kW. **2.** 7,1° ($\operatorname{tg}\alpha = 1/8$). **3.** $S = S_0 : (1 + 2\mu)$. **4.** 47,3 cal/g. **5.** 404 μA. **6.** Linsens fokaldistans är 20 cm och deviationsvinkeln för de röda strålarna 2°, varför det sökta avst. $= 200 \cdot \operatorname{tg} 2° = 7{,}0$ cm. **7.** B = 0,75 Ω och C = 10,5 Ω. **8.** 0,00030 cal.

Ragnar Nyhlén

Förberedande kurs i geometri

för klasserna 2^5 och 1^4 i realskolan. Kr 0:75, lärarex. kr 0:40

Uppförd på Statens läroboksnämnds förteckning

Lärobok i geometri

för realskolan. Kr 2:—, lärarex. kr 1:—

Uppförd på Statens läroboksnämnds förteckning

Tilläggskurs i geometri

för realgymnasiets första ring. Kr 0:90, lärarex. kr 0.45

Uppförd på Statens läroboksnämnds förteckning

Ivarsson — Thorslund — Wahlström

Geometri

för folkskolans överbyggnader. Med talrika ill. 3.e uppl. omarb. av F. Ivarsson och B. Wahlström. Med facit. Kr 0:90, lärarex. kr 0:45

Uppförd på Statens läroboknämnds förteckning

C. F. Rydberg — B. Wahlström

Matematiska uppgifter

givna i studentexamen på reallinjen. VT 1881—aug. 1946. Urval med svar och anvisningar för allmän kurs av B. Wahlström. 11:e uppl. Kr 1:30, lärarex. kr 0:65

Uppförd på Statens läroboksnämnds förtecknig

B. Wahlström

Matematiska uppgifter

givna i studentexamen på reallinjen. VT 1896—VT 1946. Urval för special-kurs. Med svar och anvisningar. 5.e uppl. Kr 1:35, lärarex. kr 0.70

Uppförd på Statens läroboksnämnds förteckning

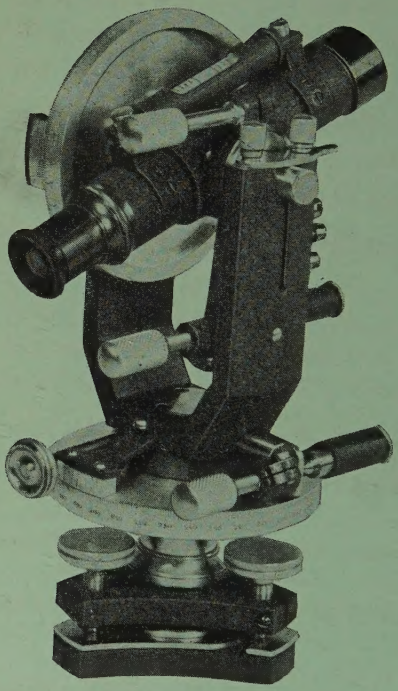
Rekvirera vår katalog över läro- och läseböcker
samt annan litteratur för undervisning och självstudium

SVENSKA BOKFÖRLAGET

DROTTNINGGATAN 20 STOCKHOLM POSTGIRO 3994

FYSIKALISKA APPARATER

från Norstedts verkstad



TEODOLIT, för skolor lämplig modell.
— under tillverkning —

Begär offert

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen Stockholm

Håkan Ohlssons Boktryckeri, Lund 1947.